

Risoluzione di equazioni non lineari

Il comando `fzero`

- ▶ `x=fzero(fun,x0)` *“tries to find a zero of fun near x0”*.
- ▶ `x0` può essere un scalare o un vettore di due componenti.
- ▶ Se `x0` è un vettore di due componenti `fzero` assume che `x0` è un intervallo e che il segno di `fun(x0(1))` è diverso del segno di `fun(x0(2))`. Se non è così dà errore.
- ▶ L'algoritmo che usa è una combinazione del metodo di bisezione, il metodo delle secanti e tecniche di interpolazione.
- ▶ `fun` è un *“function handle”*.

Esempio

Per trovare una soluzione vicina ad 1 dell'equazione $x^2 - 2 = 0$

```
>> fzero(@(x) x.^2-2,1)
```

```
ans =
```

```
1.4142
```

oppure in un M-file scrivo la funzione $f(x) = x^2 - 2$

```
function y=eempio(x)
```

```
y=x.^2-2;
```

e nella riga di comandi

```
>> fzero(@eempio,1)
```

```
ans =
```

```
1.4142
```

Il metodo di Newton

La seguente funzione implementa il metodo di Newton

```
function [x,nit,xv,flag]=newton(fun,dfun,x)
nmax=100;
toll=1.e-12;
flag=1;
xv=[x];
for nit=1:nmax
    inc=feval(fun,x)/feval(dfun,x);
    x=x-inc;
    xv=[xv x];
    if abs(inc)<toll, flag=0; return, end
end
```

Esercizio

Usando la funzione newton risolvere

$$\alpha - e^{-\alpha} = 0 \quad \text{e} \quad (\alpha - e^{-\alpha})^2 = 0.$$

Che cosa si osserva sulla velocità di convergenza?

Stima dell'ordine di convergenza di un metodo iterativo - I

La successione $\{x^{(k)}\}_{k \geq 0}$ converge ad α con ordine p se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x^{(k+1)} - \alpha|}{|x^{(k)} - \alpha|^p} = K$$

e $K > 0$.

Per k sufficientemente grande risulta essere

$$|x^{(k+1)} - \alpha| \approx K|x^{(k)} - \alpha|^p$$

ma anche

$$|x^{(k+2)} - \alpha| \approx K|x^{(k+1)} - \alpha|^p.$$

Stima dell'ordine di convergenza di un metodo iterativo - II

- ▶ Faccendo il rapporto

$$\frac{|x^{(k+2)} - \alpha|}{|x^{(k+1)} - \alpha|} \approx \left(\frac{|x^{(k+1)} - \alpha|}{|x^{(k)} - \alpha|} \right)^p$$

Chiamando $R_k = \frac{|x^{(k+1)} - \alpha|}{|x^{(k)} - \alpha|}$ abbiamo

$$R_{k+1} \approx R_k^p.$$

- ▶ Calcolando il logaritmo

$$\log R_{k+1} \approx p \log R_k$$

- ▶ Quindi

$$p \approx \frac{\log R_{k+1}}{\log R_k}.$$

Esercizio

- ▶ Scrivere una funzione di matlab per stimare l'ordine di convergenza di una successione convergente.

```
function p=ordine(v)
err=abs(v-v(end));
R=err(2:end)./err(1:end-1);
p=log(R(2:end-1))./log(R(1:end-2));
```

- ▶ Confrontare l'ordine di convergenza del metodo di Newton nel risolvere

$$\alpha - e^{-\alpha} = 0 \quad \text{e} \quad (\alpha - e^{-\alpha})^2 = 0.$$

Esercizio

Scrivere una funzione di Matlab che implementi il metodo delle secanti

$x^{(-1)}, x^{(0)}$ assegnati

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})} f(x^{(k)}) \quad \text{per } k \geq 0.$$

Fermare le iterazioni quando $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < 1.e - 10$.

Sistemi di equazioni non lineari - Il metodo di Newton

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$$

Sia $J(\mathbf{F})(\mathbf{x})$ la matrice jacobiana di \mathbf{F} nel punto \mathbf{x}

$$[J(\mathbf{F})(\mathbf{x})]_{i,j} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})$$

$\mathbf{x}^{(0)}$ assegnato

Per $k \geq 0$

sia $\mathbf{z}^{(k)}$ soluzione del sistema lineare $[J(\mathbf{F})(\mathbf{x}^{(k)})]\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{z}^{(k)}$$

Se $\|\mathbf{z}^{(k)}\| < \text{toll}$ STOP

Metodo di Newton per sistemi

```
function [x,nit,flag]=newtonsystemi(F,JF,x)
nmax=100;
toll=1.e-12;
flag=1;
for nit=1:nmax
    Fx=feval(F,x);
    JFx=feval(JF,x);
    z=JFx\Fx;
    x=x-z;
    if norm(z)<toll, flag=0; return, end
end
```

Esempio

Risolvere i seguenti sistemi di equazioni non lineari

$$\begin{aligned}x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 + 8 &= 0 \\x_1x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 8 &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2 - 37 &= 0 \\x_1 - x_2^2 - 5 &= 0 \\x_1 + x_2 + x_3 - 3 &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} &= 0 \\x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin(x_3) + 1.06 &= 0 \\e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi-3}{3} &= 0\end{aligned}$$