# Esercizio

- Scrivere una funzione di Matlab per approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

usando il metodo di Eulero esplicito

$$\begin{cases} u_{i+1} = u_i + hf(t_i, u_i) & i = 0, \ldots, N-1 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

dove $h = T/N$ e $t_i = t_0 + ih$ per $i = 0, 1, \ldots, N$.

# Errore ed ordine di convergenza

Sia

$$e(h) := \max_{0 \le i \le N} |y(t_i) - u_i| \, .$$

Se $e(h) = O(h^p)$ allora

$$e(h/2) \approx \frac{e(h)}{2^p}$$

quindi

$$2^p \approx \frac{e(h)}{e(h/2)}$$

e

$$p \approx \frac{\log[e(h)] - \log[e(h/2)]}{\log 2} \, .$$

# Esercizio

- Usando il metodo di Eulero esplicito approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -t^2 y(t) & t \in [0,1] \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

- Fare il grafico della soluzione approssimata e della soluzione esatta $y(t) = exp(-t^3/3)$.
- Stimare l'ordine di convergenza del metodo di Eulero esplicito.

# Esercizio

- Scrivere una funzione di Matlab per approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

usando il metodo di Heun

$$\begin{cases} K_1 = f(t_i, u_i), \quad K_2 = f(t_i + h, u_i + hK_1) \\ u_{i+1} = u_i + \dfrac{h}{2}(K_1 + K_2), \qquad i = 0, \dots, N-1 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

dove $h = T/N$ e $t_i = t_0 + ih$ per $i = 0, 1, \dots, N$.

# Esercizio

- Usando il metodo di Heun approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -t^2 y & t \in [0,1] \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

- Fare il grafico della soluzione approssimata e della soluzione esatta $y(t) = exp(-t^3/3)$.
- Stimare l'ordine di convergenza del metodo di Heun.

# Esercizio

- Scrivere uno script di Matlab per approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -t^2 y & t \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

usando il metodo di Crank-Nicolson

$$\begin{cases} u_{i+1} = u_i + \dfrac{h}{2}[f(t_i, u_i) + f(t_{i+1}, u_{i+1})] & i = 0, \ldots, N-1 \\ u_0 = y_0 \,. \end{cases}$$

# Suggerimento

Se $f(t,z) = -t^2 z$ il metodo di Crank-Nicolson diventa

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}\left(-t_i^2 u_i - t_{i+1}^2 u_{i+1}\right)$$

e dobbiamo calcolare $u_{i+1}$.

$$\left(1 + \frac{h}{2} t_{i+1}^2\right) u_{i+1} = \left(1 - \frac{h}{2} t_i^2\right) u_i$$

$$u_{i+1} = \frac{2 - h t_i^2}{2 + h t_{i+1}^2} u_i \, .$$

# Esercizio

- Scrivere uno script di Matlab per approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -t^2 y(t) & t \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

usando il metodo di Taylor di ordine 2.

- Suggerimento

$$y''(t) = -2ty(t) - t^2 y'(t) = -2ty(t) + t^4 y(t)$$

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2} y''(t) + \frac{h^3}{6} y'''(\xi_i)$$

$$\begin{cases} u_{i+1} = u_i - h t_i^2 u_i + \frac{h^2}{2}(-2t_i + t_i^4) u_i & i = 0, \dots, N-1 \\ u_0 = y_0 \end{cases}$$

# Runge-Kutta 4

$$
\begin{aligned}
K_1 &= f(t_i, u_i) \\
K_2 &= f(t_i + h/2, u_i + h/2\, K_1) \\
K_3 &= f(t_i + h/2, u_i + h/2\, K_2) \\
K_4 &= f(t_i + h, u_i + h\, K_3) \\
u_{i+1} &= u_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \quad i = 0, \dots, N-1
\end{aligned}
$$