CALCOLO 1		14 luglio 2006
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

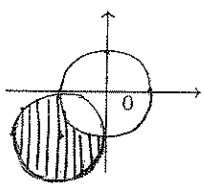
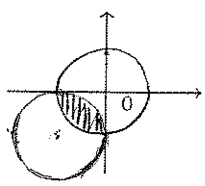
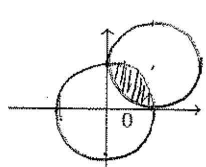
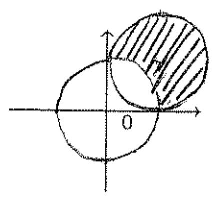
1. Sia $f(x) = xe^x$ e $g(y) = y^2 + 1$. La retta tangente al grafico della funzione composta $(g \circ f)(x)$ nel punto $(1, (g \circ f)(1))$ è: [a] $y = 2x - 2$; [b] $y = -2e^{-4}x + 3e^{-4} - 1$; [X] $y = 4e^2x + 1 - 3e^2$; [d] $y = 6e^2x - 4e^2$.

2. Il limite $\lim_{x \to 0}(1 + \sin x)^{1/(2x)}$ è uguale a: [a] $1/e$; [b] e; [X] $\sqrt{e}$; [d] e^2.

3. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile tale che $f(1) = 0$. Allora $\int_0^2 f(2x+1)e^x\,dx =$ [a] $f(5)e^2 - \int_0^2 e^x f'(2x+1)\,dx$; [b] $f(5)e^2 - 2\int_0^2 e^x f(2x+1)\,dx$; [X] $f(5)e^2 - 2\int_0^2 e^x f'(2x+1)\,dx$; [d] $f(2x+1)e^x - \int_0^2 e^x f'(2x+1)\,dx$.

4. Sia $f : (0,1] \to \mathbf{R}$ una funzione continua tale che $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. Allora il seguente enunciato "$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che se $0 < x < \delta$ allora $\left|\int_x^1 f(t)\,dt - 5\right| < \epsilon$" significa: [a] $\lim_{x \to 1^-} \int_x^1 f(t)\,dt = 5$; [b] $\lim_{x \to 0^+} \int_0^x f(t)\,dt = 5$; [X] $\int_0^1 f(t)\,dt = 5$; [d] $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 5$.

5. L'insieme dei numeri complessi z tali che $|z| < 1$ e $|z - 1 - i| < 1$ è la regione tratteggiata

[a]  ; [b]  ; [X]  ; [d]  .

6. L'insieme dei valori $\alpha > 0$ per cui l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{x \sin(1/x)}{(x+1)^\alpha}\,dx$ è convergente è dato da: [X] $\alpha > 1$; [b] nessun valore; [c] $\alpha < 1$; [d] $\alpha > 2$.

7. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1\ . \end{cases}$$

Allora $\lim_{x \to +\infty} y(x) =$ [a] $-\infty$; [b] non esiste; [c] 0; [X] $+\infty$.

8. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile con derivata continua, e si abbia $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Allora è vero che: [a] $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ è divergente ; [b] $\int_0^{+\infty} f'(x)\,dx$ è divergente ; [c] $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = -f(0)$; [X] $\int_0^{+\infty} f'(x)\,dx = -f(0)$.

CALCOLO I	14 luglio 2006

1. (6 punti)
Si determinino i valori del parametro $x \in \mathbf{R}$ per cui la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n^3 \log n}\left(\frac{5x+1}{x^2+5}\right)^n$$

è convergente.

Siccome $5x+1$ può avere sia segno positivo che segno negativo, conviene considerare innanzitutto la convergenza assoluta, in modo da poter applicare qualche criterio di convergenza: ad esempio, il criterio del rapporto.

Si ha, facendo il rapporto fra $|a_{n+1}|$ ed $|a_n|$:

$$\frac{n+2}{(n+1)^3 \log(n+1)} \cdot \frac{n^3 \log n}{n+1}\left|\frac{5x+1}{x^2+5}\right| = \frac{n+2}{n+1}\,\frac{n^3}{(n+1)^3}\boxed{\frac{\log n}{\log(n+1)}}\left|\frac{5x+1}{x^2+5}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \left|\frac{5x+1}{x^2+5}\right|.$$

$\xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, poiché $\frac{\log t}{\log(t+1)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1$, dall'Hôpital.

Dunque c'è convergenza assoluta per $\left|\frac{5x+1}{x^2+5}\right| < 1$, cioè per

$$-x^2-5 < 5x+1 < x^2+5 \iff \begin{cases} x^2+5x+6>0 \\ x^2-5x+4>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x<-3,\ x>-2 \\ x<1,\ x>4 \end{cases} \iff \begin{cases} x<-3 \\ -2<x<1 \\ x>4. \end{cases}$$

In questo insieme c'è quindi anche convergenza semplice.

Se $-3<x<-2$, oppure $1<x<4$, si ha che $\left|\frac{5x+1}{x^2+5}\right| > 1$, per cui

$$|a_n| = \frac{n+1}{n^3 \log n}\left|\frac{5x+1}{x^2+5}\right|^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

(l'esponenziale diverge più rapidamente di qualunque potenza e del logaritmo.)

Quindi la serie non converge, dato che $|a_n| \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (condizione necessaria di convergenza).

Se $x=-3$, oppure $x=-2$, oppure $x=1$, oppure $x=4$, si ha sempre $\left|\frac{5x+1}{x^2+5}\right| = 1$, dunque $|a_n| = \frac{n+1}{n^3 \log n}$. Siccome il logaritmo diverge, si ha

$$|a_n| \le \frac{n+1}{n^3} \sim \frac{1}{n^2},$$

dunque la serie converge assolutamente, essendo maggiorata da una serie convergente, e quindi c'è convergenza semplice.

L'insieme di convergenza è quindi

$$x \le -3, \quad -2 \le x \le 1, \quad x \ge 4.$$

2. (6 punti)
Sia S la regione piana delimitata dal grafico della funzione $f(x) = 2 - x^2$, dalle rette verticali $x = 0$ e $x = 1$ e dall'asse x. Calcolare l'area totale (parte di base, parte laterale, parte superiore) della superficie del solido generato facendo ruotare S attorno all'asse y.

L'area di base è quella di un cerchio di raggio 1, dunque vale π.

L'area laterale è quella di un cilindro di altezza $f(1) = 1$ e circonferenza di base di lunghezza 2π, dunque vale 2π (altezza per lunghezza del perimetro di base).

Per calcolare l'area della parte superiore si utilizza la formula

$$A = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx .$$

In questo caso $a=0$, $b=1$, $f'(x) = -2x$, quindi:

$$A = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\, dx \underset{\downarrow}{=} \frac{\pi}{4}\int_1^5 \sqrt{t}\, dt = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}\, t^{3/2}\Big|_1^5 = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$$

$1+4x^2 = t$
$8x\,dx = dt$
$x=0 \to t=1$
$x=1 \to t=5$

L'area totale è dunque $\pi\left(3 + \frac{5\sqrt{5}}{6} - \frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{6}(17+5\sqrt{5})$.

CALCOLO I	14 luglio 2006

3. (6 punti)

Trovare il massimo assoluto, gli eventuali massimi relativi, il minimo assoluto e gli eventuali minimi relativi della funzione

$$f(x) = \begin{cases} (2x+1)e^x & \text{se } x < 0 \\ 1 - x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

nell'intervallo $[-2, 2]$.

La funzione vale negli estremi: $f(-2) = -3e^{-2}$, $f(2) = -1$.

È continua per $x=0$ e vale: $f(0) = 1$ (non essendo derivabile in $x=0$, questo valore può essere di interesse).

Per $x>0$ la derivata vale -1 e non si annulla mai (la funzione è una retta decrescente...). Il punto $x=-2$ è dunque di <u>minimo relativo</u>.

Per $x<0$ si ha

$$f'(x) = 2e^x + (2x+1)e^x = (2x+3)e^x,$$

che è >0 per $x > -3/2$, <0 per $x < -3/2$ ed $=0$ per $x = -3/2$.

Quindi $-3/2$ è un punto di <u>minimo relativo</u>, ove si ha

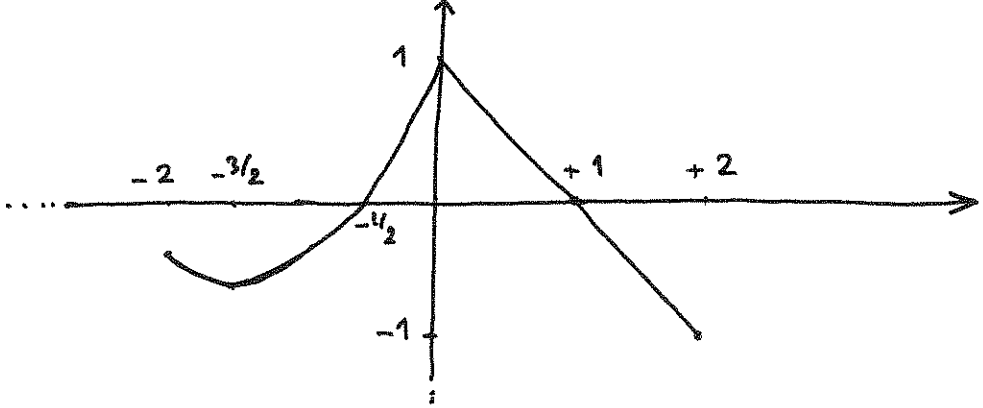
$$f(-3/2) = -2e^{-3/2},$$

il punto -2 è di <u>massimo relativo</u>, il punto 0 è di <u>massimo relativo</u> ($f'(x)>0$ per x vicino a 0 e $x<0$, $f'(x)<0$ per $x>0$).

Infine, $f(0)=1$ è chiaramente il <u>massimo assoluto</u> (i valori negli altri punti $x = -2, -3/2, 2$ sono tutti negativi); $f(2) = -1$ è il <u>minimo assoluto</u>, poiché

$$f(-3/2) = -2e^{-3/2} > f(2) = -1 \iff 2 < e^{3/2}, \text{ ovvio poiché } e > 2.$$

[Non necessario, ma se proprio si vuole... ecco il grafico:



.]