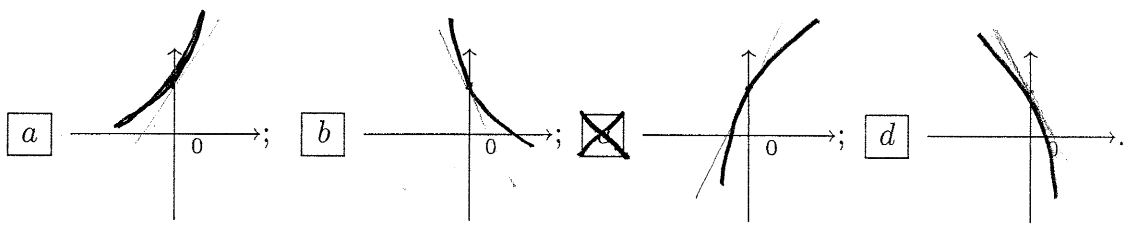
CALCOLO 1		16 giugno 2006
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

1. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - (x+2)(1+\frac{1}{y}) = 0 \\ y(0) = 1 \ . \end{cases}$$

Allora il grafico di $y(x)$ vicino all'origine è:



2. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ una funzione continua, e valga $f(x) > 0$ per $x \in [0, +\infty)$. Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, allora è sempre vero che: $\boxed{a}$ $f(x)$ ha minimo in $[0, +\infty)$; $\boxtimes$ $f(x)$ ha massimo in $[0, +\infty)$; $\boxed{c}$ $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ è convergente; $\boxed{d}$ $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ è convergente.

3. L'insieme dei valori $a > 0$ per cui la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3n+a}{an+2}\right)^n$ è convergente è dato da: $\boxed{a}$ $a < 3$; $\boxtimes$ $a > 3$; $\boxed{c}$ $a > 2$; $\boxed{d}$ $a < 2$.

4. Sia $f(x) = x^2+1$ e $g(y) = 3\log(\sqrt{y})$. La derivata della funzione composita $g \circ f$ è: $\boxed{a}$ $\frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$; $\boxed{b}$ $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; $\boxtimes$ $\frac{3x}{x^2+1}$; $\boxed{d}$ $\frac{x}{x^2+1}$.

5. I numeri complessi z che risolvono l'equazione $z(\overline{z} + i) = 2$ sono $\boxed{a}$ i e $2i$; $\boxed{b}$ $-i$ e $-2i$; $\boxtimes$ $-i$ e $2i$; $\boxed{d}$ $-2i$ e i.

6. L'insieme dei valori $\alpha > 0$ per cui l'integrale improprio $\int_2^3 \frac{\log(x-1)}{(x-2)^{\alpha}}$ è convergente è dato da: $\boxed{a}$ $\alpha > 1$; $\boxed{b}$ $\alpha > 0$; $\boxed{c}$ $\alpha < 1$; $\boxtimes$ $\alpha < 2$.

7. Si consideri la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ con $a_n > 0$. Allora è sempre vero che: $\boxtimes$ se $a_n \leq 2^{-n}$ la serie è convergente ; $\boxed{b}$ se $a_n \to 0$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ è convergente; $\boxed{c}$ se $a_n \geq 2^{-n}$ la serie è divergente; $\boxed{d}$ se $a_n \to 0$ la serie è convergente .

8. Il limite $\lim_{x \to 0^+} (1+x^2)^{1/x}$ è uguale a: $\boxed{a}$ 0; $\boxed{b}$ e; $\boxtimes$ 1; $\boxed{d}$ $+\infty$.

CALCOLO I	16 giugno 2006

1. (6 punti)
Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x + 2}{\cos x - 2} \operatorname{tg} x \, dx \ .$$

Siccome $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\frac{(\cos x)'}{\cos x}$, cambiando variabile $t = \cos x$ si ha $dt = -\cos x \, dx$ e dunque (essendo $\cos 0 = 1$, $\cos \pi/4 = \sqrt{2}/2$)

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x + 2}{\cos x - 2} \operatorname{tg} x \, dx = \int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{t+2}{t-2} \frac{1}{t} (-dt) =$$

$$= \int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{t+2}{(t-2)t} \, dt \ .$$

L'integrale razionale si può scrivere come:

$$\frac{t+2}{(t-2)t} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t} = \frac{At + Bt - 2B}{(t-2)t} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ -2B = 2 \end{cases}, \quad \begin{matrix} A = 2 \\ B = -1 \end{matrix},$$

dunque

$$\dots = \int_{\sqrt{2}/2}^{1} \left(\frac{2}{t-2} - \frac{1}{t} \right) dt = \left(2 \log|t-2| - \log|t| \right) \Big|_{\sqrt{2}/2}^{1} =$$

$$= 2 \log 1 - \log 1 - 2 \log(2 - \sqrt{2}/2) + \log \sqrt{2}/2 =$$

$$= \frac{3}{2} \log 2 - 2 \log(4 - \sqrt{2}) \ .$$

CALCOLO I	16 giugno 2006

2. **(6 punti)**
Si determini la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 2e^x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

Il polinomio associato è $r^2 - r - 2$, dunque le radici sono

$$r = \frac{1 \mp \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \mp 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ 2\,. \end{cases}$$

La soluzione dell'equazione omogenea è quindi:

$$y_0(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}\,.$$

Una soluzione particolare della non-omogenea è della forma $\hat{y}(x) = Ae^x$. Inserendo nell'equazione, essendo $\hat{y}' = Ae^x$, $\hat{y}'' = Ae^x$, si ha

$$Ae^x - Ae^x - 2Ae^x = 2e^x \implies A = -1\,.$$

La soluzione generale della non-omogenea è quindi:

$$y(x) = y_0(x) + \hat{y}(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - e^x\,.$$

Imponendo i dati di Cauchy si ha:

$$\begin{cases} 0 = y(0) = c_1 + c_2 - 1 \\ 0 = y'(0) = \left(-c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{2x} - e^x\right)\Big|_{x=0} = \\ \qquad = -c_1 + 2c_2 - 1\,. \end{cases}$$

Risolvendo si ha $c_2 = 2/3$ (sommando le equazioni) e quindi $c_1 = 1 - c_2 = 1/3$.

La soluzione è dunque:

$$y(x) = \frac{1}{3} e^{-x} + \frac{2}{3} e^{2x} - e^x\,.$$

3. (6 punti)
Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + \frac{2}{2x-1}\,.$$

Se ne disegni qualitativamente il grafico (in particolare, si studino il limite a $+\infty$, a $-\infty$ e negli eventuali punti ove $f(x)$ non è definita; crescenza/decrescenza; convessità/concavità).

La funzione <u>non</u> è definita per $x = 1/2$. Siccome $(2x-1) \to 0^+$ per $x \to 1/2^+$ e $(2x-1) \to 0^-$ per $x \to 1/2^-$ si ha

$$\lim_{x\to 1/2^+} f(x) = +\infty\,, \quad \lim_{x \to 1/2^-} f(x) = -\infty\,.$$

Poi, siccome x^2 tende all'infinito più velocemente di x, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty\,.$$

Per la stessa ragione, <u>non</u> si hanno asintoti obliqui.
Si verifica inoltre immediatamente che $f(0) = -2$, e che $f(x) > 0$ per $x > 1/2$.
Poi:

$$f'(x) = x + 4 - \frac{4}{(2x-1)^2} = \frac{(x+4)(4x^2-4x+1)-4}{(2x-1)^2} = \frac{4x^3+12x^2-15x}{(2x-1)^2}\,.$$

Siccome le radici di $4x^2+12x-15=0$ sono:

$$x = \frac{-6 \mp \sqrt{36+60}}{4} = \frac{-6 \mp 4\sqrt{6}}{4} = -\frac{3}{2} \mp \sqrt{6}\,,$$

si ha che $x(4x^2+12x-15) > 0$ per $-3/2-\sqrt{6} < x < 0$ e $x > -\frac{3}{2}+\sqrt{6}$ $(> 1/2)$,
mentre $x(4x^2+12x-15) < 0$ per $x < -3/2-\sqrt{6}$ e $0 < x < 1/2$, $1/2 < x < -3/2+\sqrt{6}$.
Quindi $f(x)$ cresce per $-3/2-\sqrt{6} < x < 0$ e $x > -3/2+\sqrt{6}$, e decresce altrove.

Ancora:

$$f''(x) = 1 + \frac{16}{(2x-1)^3} > 0 \text{ per } \frac{16}{(2x-1)^3} > -1\,,$$

cioè per $(2x-1) > 0$ e $(2x-1)^3 < -16$, ossia $x > 1/2$ e $2x < 1 - 2\sqrt[3]{2} \iff x < 1/2 - \sqrt[3]{2}$.

Il grafico è :