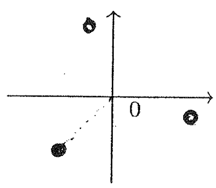
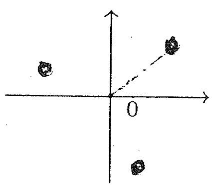
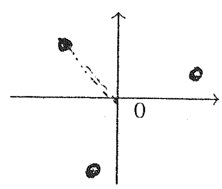
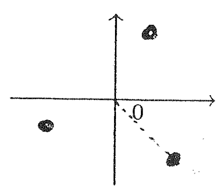
CALCOLO 1		24 febbraio 2006
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

1. Sia $f(w) = 2w + \log w$. Allora la retta tangente al grafico di $f^{-1}(x)$ in $(2, f^{-1}(2))$ è data da: $\boxed{a}$ $y = (x-2)/3$; $\boxed{b}$ $y = x+1$; $\boxed{c}$ $y = x-1$; $\boxed{\times}$ $y = (x+1)/3$.

2. Sia $f(x) = \cos(2x)$ e $g(y) = e^{-y+1}$. Il polinomio di Taylor di secondo grado (e di centro $x_0 = 0$) della funzione $(g \circ f)(x)$ è: $\boxed{\times}$ $1 + 2x^2$; $\boxed{b}$ $2x - 2x^2$; $\boxed{c}$ $1 - \frac{9}{2}x^2$; $\boxed{d}$ $2x + 2x^2$.

3. I numeri complessi $z = \sqrt[3]{2 - 2i}$ sono:

$\boxed{\times}$  ; $\boxed{b}$  ; $\boxed{c}$  ; $\boxed{d}$  .

4. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua tale che $f(0) = 0$. Allora $\int_0^1 (1-x) f(2x)\, dx =$ $\boxed{a}$ $-\frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2 f'(2x)\, dx$; $\boxed{b}$ $\frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2 f'(2x)\, dx$; $\boxed{\times}$ $\int_0^1 (1-x)^2 f'(2x)\, dx$; $\boxed{d}$ $-\int_0^1 (1-x)^2 f'(2x)\, dx$.

5. Si consideri la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3(1+x)^n}$. Per $x = 2$ la somma vale: $\boxed{a}$ $\frac{1}{48}$; $\boxed{b}$ $\frac{1}{144}$; $\boxed{\times}$ $\frac{1}{18}$; $\boxed{d}$ $\frac{1}{40}$.

6. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile che si annulla in $x = 0$, $x = 1$ e $x = 2$ (e solo in questi tre punti). Allora $\boxed{a}$ $f(x)$ è un polinomio di terzo grado; $\boxed{b}$ $f(x)$ cambia di segno tre volte; $\boxed{\times}$ $f'(x)$ si annulla almeno due volte; $\boxed{d}$ $f'(x)$ si annulla esattamente due volte.

7. L'insieme dei valori $\alpha > 0$ per cui l'integrale improprio $\int_0^2 \frac{x^\alpha + 2x^3}{\sin^2 x}$ è convergente è dato da: $\boxed{a}$ $\alpha > 3$; $\boxed{b}$ $\alpha > 4$; $\boxed{\times}$ $\alpha > 1$; $\boxed{d}$ $\alpha > 2$.

8. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua, e valga $0 \le f(x) \le 10$ per $x \in [0, 10]$. Allora è sempre vero che: $\boxed{a}$ per $x \in [0, 10)$ si ha $0 \le f(x) < 10$; $\boxed{b}$ per $x \in (0, 10]$ si ha $0 < f(x) \le 10$; $\boxed{\times}$ esiste $x^* \in [0, 10]$ tale che $f(x^*) = x^*$; $\boxed{d}$ per $x \in (0, 10)$ si ha $0 < f(x) < 10$.

CALCOLO I	24 febbraio 2006

1. (6 punti)
Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to+\infty}(3x^2-2x)\Big[\log(2x^3+3x)-\log(2x^3)-\frac{2}{x^2}\Big].$$

Per le proprietà dei logaritmi,

$$\log(2x^3+3x)-\log(2x^3)=\log\left(\frac{2x^3+3x}{2x^3}\right)=\log\left(1+\frac{3}{2x^2}\right).$$

Dunque il limite è della forma $\infty\cdot 0$.

Si ha facilmente

$$\lim_{x\to+\infty}(3x^2-2x)\left(-\frac{2}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x-6x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}-6=-6.$$

Resta da calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^2-2x)\log\left(1+\frac{3}{2x^2}\right)$.

1° modo: Taylor

Siccome $\log(1+t)\sim t$ per $t\to 0$, posto $t=3/2x^2$ si ha $\log\left(1+\frac{3}{2x^2}\right)\sim\frac{3}{2x^2}$ per $x\to+\infty$. Così

$$\lim_{x\to+\infty}(3x^2-2x)\log\left(1+\frac{3}{2x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2x}{2x^2}\cdot 3=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2-6x}{2x^2}=\frac{9}{2}-\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=9/2.$$

2° modo: Hôpital

Riscrivendo $(3x^2-2x)\log\left(1+\frac{3}{2x^2}\right)=\dfrac{\log(1+3/2x^2)}{(3x^2-2x)^{-1}}$, abbiamo una forma $\frac{0}{0}$, e possiamo applicare l'Hôpital.

Dunque facciamo le derivate di numeratore e denominatore:

$$\frac{\dfrac{1}{\left(1+\frac{3}{2x^2}\right)}\cdot\frac{3}{\cancel{2}}(-\cancel{2})x^{-3}}{-(3x^2-2x)^{-2}(6x-2)}=\frac{3}{\left(x^3+\frac{3}{2}x\right)}\cdot\frac{(3x^2-2x)^2}{(6x-2)}=\frac{3(9x^4-12x^3+4x^2)}{6x^4-2x^3+9x^2-3x}=$$

$$=\frac{\cancel{x^4}\left(27-\frac{36}{x}+\frac{12}{x^2}\right)}{\cancel{x^4}\left(6-\frac{2}{x}+\frac{9}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\frac{27}{6}=\frac{9}{2}.$$

Dunque il limite richiesto è $-6+9/2=-3/2$.

2. (6 punti)
Si determini la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = \sin(2x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1\ . \end{cases}$$

Equazione lineare del II° ordine, a coefficienti costanti, non-omogenea.

Polinomio associato: $r^2 - r - 2$. Radici: $r = \frac{1 \mp \sqrt{1+8}}{2} = \genfrac{}{}{0pt}{}{-1}{2}$.

Soluzione generale dell'omogenea: $c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$.

Soluzione particolare della non-omogenea: $A \operatorname{sen}(2x) + B\cos(2x)$.

Dunque, occorre determinare A e B. Si ha

$$\hat{y}(x) = A \operatorname{sen}(2x) + B\cos(2x)\ ;\ \hat{y}'(x) = 2A\cos(2x) - 2B\operatorname{sen}(2x)$$

$$\hat{y}''(x) = -4A\operatorname{sen}(2x) - 4B\cos(2x)\ ,$$

e quindi

$$\hat{y}'' - \hat{y}' - 2\hat{y} = \left(-4A\operatorname{sen}(2x) - 4B\cos(2x)\right) - \left(2A\cos(2x) - 2B\operatorname{sen}(2x)\right) +$$

$$- 2\left(A\operatorname{sen}(2x) + B\cos(2x)\right) =$$

$$= (-6A + 2B)\operatorname{sen}(2x) + (-6B - 2A)\cos(2x) = \operatorname{sen}(2x),$$

cioè

$$\begin{cases} -6A + 2B = 1 \qquad 18B + 2B = 1 \rightarrow B = 1/20 \\ -6B - 2A = 0 \rightarrow A = -3B \qquad A = -3/20 \end{cases}.$$

Abbiamo dunque $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - \frac{3}{20}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{20}\cos(2x)$.

Imponendo i dati di Cauchy, si ha (essendo

$$y'(x) = -c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{2x} - \frac{3}{10}\cos(2x) + \frac{1}{10}\operatorname{sen}(2x)):$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \frac{1}{20} = y(0) = 0 \rightarrow c_1 = -c_2 - \frac{1}{20} \qquad c_1 = -\frac{28}{60} = -\frac{7}{15}. \\ -c_1 + 2c_2 - \frac{3}{10} = y'(0) = 1 \qquad c_2 + \frac{1}{20} + 2c_2 - \frac{3}{10} = 1 \rightarrow 3c_2 = 5/4 \rightarrow c_2 = 5/12 \end{cases}$$

La soluzione richiesta è quindi:

$$y(x) = -\frac{7}{15}e^{-x} + \frac{5}{12}e^{2x} - \frac{3}{20}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{20}\cos(2x).$$

CALCOLO I	24 febbraio 2006

3. **(6 punti)**
Sia f la funzione definita da

$$f(x) = (2-x)\sqrt{x+1}\,e^{-x}\,.$$

Se ne disegni qualitativamente il grafico (in particolare, crescenza/decrescenza e pendenza nel punto di ascissa $x=-1$; non è invece richiesto lo studio di convessità/concavità).

Calcolare il punto di massimo assoluto e il punto di minimo assoluto della funzione f.

La funzione è definita quando l'argomento della radice è ≥ 0, cioè $x+1 \geq 0$, $x \geq -1$.

Si annulla per $x=2$ e $x=-1$, è positiva per $-1<x<2$, negativa per $2<x<+\infty$. [Il punto di massimo x_1 sarà quindi fra -1 e 2, e il punto di minimo x_2 sarà maggiore di 2.

Poi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ poiché e^x va all'infinito più forte di qualunque potenza di x; inoltre $f(0)=2$.

La derivata vale:

$$f'(x) = -\sqrt{x+1}\,e^{-x} + (2-x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,e^{-x} - (2-x)\sqrt{x+1}\,e^{-x} =$$

$$= \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x+1}}\left(-2x-\cancel{2}+\cancel{2}-x-2x-4+2x^2\right) = \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x+1}}\left(2x^2-5x-4\right).$$

Le radici di $f'(x)$ sono:

$$x = \frac{5\mp\sqrt{25+32}}{4} = \frac{5\mp\sqrt{57}}{4}\,.$$

Si ha $\frac{5+\sqrt{57}}{4} > \frac{5+7}{4} = 3$, $\frac{5-\sqrt{57}}{4} < 0$, $\frac{5-\sqrt{57}}{4} > \frac{5-8}{4} = -3/4$.

La funzione $f(x)$ cresce per $x < \frac{5-\sqrt{57}}{4}$, decresce per $\frac{5-\sqrt{57}}{4} < x < \frac{5+\sqrt{57}}{4}$, cresce per $x > \frac{5+\sqrt{57}}{4}$.

Quindi il punto $x_1 = \frac{5-\sqrt{57}}{4}$ è di massimo, mentre $x_2 = \frac{5+\sqrt{57}}{4}$ è di minimo.

Infine, $\lim_{x\to-1^+} f'(x) = +\infty$ (denominatore $\to 0^+$, numeratore $\to 3e$), cioè la pendenza è verticale, con funzione $f(x)$ crescente.

Il grafico (qualitativo) è dunque:

[scale differenti in ascissa ed ordinata!