CALCOLO 1		22 giugno 2005
Cognome:	Nome:	Matricola:

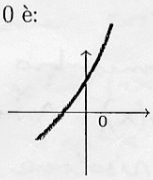
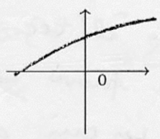
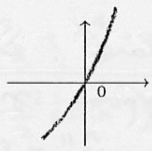
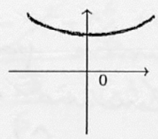
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

1. La retta perpendicolare al grafico della curva di equazione $y = 5x^2$ nel punto di ascissa $x = 1$, è: ☒ $y = -\frac{1}{10}(x-1)+5$; $\boxed{b}$ $y = \frac{1}{10}(x-1)+5$; $\boxed{c}$ $y = -\frac{1}{10}x+5$; $\boxed{d}$ $y = \frac{1}{10}(x-1)$.

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4}\int_0^{x^2} (\cos t - 1)\, dt =$$
☒ 0; $\boxed{b}$ ∞; $\boxed{c}$ 2; $\boxed{d}$ 1.

3. Sia $z = 1 - i$ e $w = \sqrt{z}$. Allora $|w| =$ $\boxed{a}$ $\sqrt{2}$; ☒ $\sqrt[4]{2}$; $\boxed{c}$ $1+\sqrt{2}$; $\boxed{d}$ $\sqrt[3]{2}$.

4. Sia $y = y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = y^3 + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$. Allora il grafico di y vicino a $t = 0$ è:

☒  ; $\boxed{b}$  ; $\boxed{c}$  ; $\boxed{d}$  .

5. Se f è continua, $\int_{-1}^{1} f(2x+5)dx =$ $\boxed{a}$ $\frac{1}{2}\int_{-3}^{7} f(t)dt$; $\boxed{b}$ $2\int_{-3}^{7} f(t)dt$; ☒ $\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(t+5)dt$; $\boxed{d}$ $2\int_{-2}^{2} f(t+5)dt$.

6. Sia $g(x) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, una funzione due volte derivabile. Se g ha un minimo per $x = 1$, allora necessariamente: $\boxed{a}$ $g'(1) = 0$ e $g''(1) > 0$; $\boxed{b}$ $g'(1) = 0$ e $g''(1) < 0$; ☒ La funzione $-g$ ha un massimo per $x = 1$; $\boxed{d}$ La funzione $|g|$ ha un massimo per $x = 1$.

7. Sia $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$. Il polinomio di Taylor di f, di grado 3 e con centro in $x = 1$, è ☒ $10 + 10(x-1) + 5(x-1)^2 + (x-1)^3$; $\boxed{b}$ $4 + 6(x-1) + 4(x-1)^2 + (x-1)^3$; $\boxed{c}$ $4 + 5(x-1) + 10(x-1)^2 + (x-1)^3$; $\boxed{d}$ $10 + 5(x-1) + 8(x-1)^2 + (x-1)^3$.

8. Sia $x > 0$, allora $\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n =$ $\boxed{a}$ ∞; ☒ $\frac{1}{x^4+x^2}$; $\boxed{c}$ $\frac{x^2}{1+x^2}$; $\boxed{d}$ $\frac{x^4}{1+x^2}$.

1. (6 punti)
Si determini la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = 5x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \,. \end{cases}$$

Si dica inoltre, motivando la risposta, se esiste un valore $x_0 > 0$ tale che $y(x_0) < -100$.

- Soluzione dell'omogenea $y'' - 4y' + 5y = 0$: polinomio associato è $r^2 - 4r + 5$. Le radici sono

$$r = 2 \mp \sqrt{4-5} = 2 \mp \sqrt{-1} = 2 \mp i\,.$$

Dunque la soluzione generale dell'omogenea è

$$y_0(x) = c_1 e^{2x} \cos x + c_2 e^{2x} \operatorname{sen} x\,.$$

- Soluzione particolare: essendo il secondo membro un polinomio di primo grado, provo con $\hat{y}(x) = Ax + B$. Si ha $\hat{y}' = A$, $\hat{y}'' = 0$, per cui devo risolvere

$$-4A + 5(Ax + B) = 5x\,,$$

da cui $A = 1$, e $5B - 4A = 0$, cioè $B = 4/5$.
Così ho la soluzione completa

$$y(x) = c_1 e^{2x} \cos x + c_2 e^{2x} \operatorname{sen} x + x + 4/5\,.$$

- Imponendo i dati di Cauchy (essendo $y' = 2c_1 e^{2x} \cos x + {}$ $- c_1 e^{2x} \operatorname{sen} x + 2c_2 e^{2x} \operatorname{sen} x + c_2 e^{2x} \cos x + 1$, per cui $y'(0) = 2c_1 + c_2 + 1$) si ha

$$\begin{matrix} c_1 + 4/5 = 0 \\ 2c_1 + c_2 + 1 = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} c_1 = -4/5 \\ c_2 = 3/5\,. \end{matrix}$$

Soluzione: $y(x) = \left(-\frac{4}{5} \cos x + \frac{3}{5} \operatorname{sen} x\right) e^{2x} + x + 4/5$.

- Il "pezzo" $x + 4/5 \to +\infty$ per $x \to +\infty$, e $e^{2x} \to +\infty$ per $x \to +\infty$, più forte di $x + 4/5$. Dunque, se trovo valori x grandi per cui $\left(-4/5 \cos x + \frac{3}{5} \operatorname{sen} x\right) < 0$, avrò valori di $y(x)$ negativi quanto voglio. Allora basta scegliere $x = 2k\pi$, con k abbastanza grande, così $\cos(2k\pi) = +1$, $\operatorname{sen}(2k\pi) = 0$ e $\left(-4/5 \cos(2k\pi) + 3/5 \operatorname{sen}(2k\pi)\right) = -4/5$

2. (6 punti) Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\log(1+x)-\sin(x^2)}{x\cos x - \tan x}.$$

Sviluppo con Taylor:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \ ; \quad \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) = \ ; \quad \operatorname{sen}(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6).$$

$$= 1 - x^2/2 + o(x^2)$$

Allora

$$\frac{x\log(1+x) - \sin(x^2)}{x\cos x - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \cos x \cdot \frac{x\log(1+x) - \sin(x^2)}{x\cos^2 x - \sin x}$$

Siccome $\cos x \to 1$, considero solo il secondo fattore:

$$\frac{x\log(1+x) - \sin(x^2)}{x\cos^2 x - \sin x} = \frac{\cancel{x^2} - x^3/2 + x^4/3 + o(x^4) - \cancel{x^2} + x^6/6 + o(x^6)}{x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} =$$

$$= \frac{-x^3/2 + o(x^4)}{x\left(1 - x^2 + o(x^2)\right) - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{-x^3/2 + o(x^4)}{x - x^3 + o(x^3) - x + x^3/6} =$$

$$= \frac{-x^3/2 + o(x^4)}{-5/6\, x^3 + o(x^3)} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{-1/2}{-5/6} = 3/5$$

Se uno sa lo sviluppo di $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, il denominatore si tratta più semplicemente:

$$x\cos x - \tan x = x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) =$$

$$= x - \frac{x^3}{2} + o(x^3) - x - \frac{x^3}{3} = -5/6\, x^3 + o(x^3).$$

Il calcolo di $\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2$ è questo (sviluppo del quadrato...):

$$\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 = 1 + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \left(o(x^2)\right)^2 - 2\cdot 1\cdot\frac{x^2}{2} - 2\cdot\frac{x^2}{2}\cdot o(x^2) - 2\cdot 1\cdot o(x^2) =$$

$$= 1 + \frac{x^4}{4} + o(x^4) - x^2 + o(x^4) + o(x^2) = 1 - x^2 + o(x^2).$$

3. (6 punti)

(i) Presentando con adeguato dettaglio il procedimento seguito, si calcoli l'integrale

$$\int_1^2 x(\log x)^2 \, dx \; .$$

(ii) Si dica inoltre, motivando la risposta, se l'integrale

$$\int_0^1 x(\log x)^2 \, dx$$

finito o infinito.

Integrazione per parti: primitiva di x è $x^2/2$, derivata di $(\log x)^2$ è $2(\log x)\frac{1}{x}$. Dunque:

$$\int_1^2 x(\log x)^2 dx = \frac{x^2}{2}(\log x)^2 \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{2}} \cancel{2}(\log x)\frac{1}{\cancel{x}} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}(\log x)^2 \Big|_1^2 - \int_1^2 x \log x \, dx$$

Ora la derivata di $\log x$ è $1/x$, per cui

$$\int_1^2 x \log x \, dx = \frac{x^2}{2}\log x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^{\cancel{2}}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\log x \Big|_1^2 - \frac{1}{4}x^2 \Big|_1^2$$

Così la primitiva è $\frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \frac{x^2}{2}\log x + \frac{1}{4}x^2 +$

e l'integrale vale

$$2(\log 2)^2 - 2\log 2 + 1 - 1/4 = 2(\log 2)^2 - 2\log 2 + 3$$

Visto che so la primitiva, devo calcolare

$$\lim_{a\to 0^+} \int_a^1 x(\log x)^2 dx = \lim_{a\to 0^+} \Big[\frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \frac{x^2}{2}\log x +$$

$$= \frac{1}{4} - \lim_{a\to 0^+} \left(\frac{a^2}{2}(\log a)^2 - \frac{a^2}{2}\log a + \frac{1}{4}a^2 \right).$$

Siccome $(a \log a) \xrightarrow[a\to 0^+]{} 0$, il risultato finale è che l

è finito (e vale $1/4$).