CALCOLO 1		**27 gennaio 2006**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

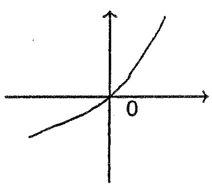
1. Che cosa significa il seguente enunciato? "$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tale che se $0 < |h| < \delta$ allora $\left|\frac{f(2+h)-f(2)-5h}{h}\right| < \epsilon$." $\boxed{a}$ $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$; $\boxed{b}$ $\lim_{x\to 5} f(x) = 2$; $\boxed{\times}$ $f'(2) = 5$; $\boxed{d}$ $f'(5) = 2$.

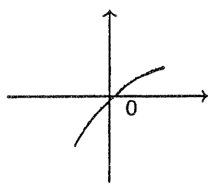
2. L'insieme dei valori del parametro x reale per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)x^n}{n^3}$ è convergente è: $\boxed{a}$ $-1 \le x \le 1$; $\boxed{b}$ $-1 < x \le 1$; $\boxed{c}$ $-1 < x < 1$; $\boxed{\times}$ $-1 \le x < 1$.

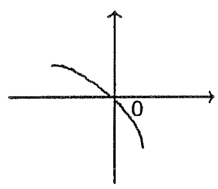
3. Sia $f(y) = \log(1+y)$ e $g(x) = \frac{2x}{x+3}$. L'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f \circ g$ nel punto $x = 1$ è: $\boxed{a}$ $r(x) = \log\frac{3}{2} + \frac{1}{12}(x-1)$; $\boxed{b}$ $r(x) = \log\frac{3}{2} + \frac{1}{3}(x-1)$; $\boxed{c}$ $r(x) = \log\frac{3}{2} + \frac{1}{6}(x-1)$; $\boxed{\times}$ $r(x) = \log\frac{3}{2} + \frac{1}{4}(x-1)$.

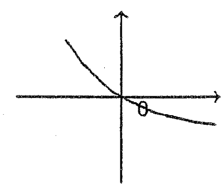
4. Quante soluzioni $x > 0$ ha $x\sin(2x) = 20$? $\boxed{a}$ 1; $\boxed{b}$ 20; $\boxed{c}$ nessuna; $\boxed{\times}$ infinite.

5. Il grafico di $f(x) = \int_0^x \frac{e^t}{t-1}\,dt$ vicino a $x = 0$ è:

$\boxed{a}$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxed{\times}$ 

; $\boxed{d}$ 

.

6. Quanti sono i numeri complessi (distinti) soluzione di $|z|^2 + \overline{z} = 2+i$? $\boxed{\times}$ due; $\boxed{b}$ infiniti; $\boxed{c}$ nessuno; $\boxed{d}$ uno.

7. L'insieme dei valori del parametro reale α per cui l'integrale $\int_1^{\infty} \frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x^\alpha}$ è convergente è: $\boxed{a}$ $\alpha > 1$; $\boxed{b}$ $\alpha > 2$; $\boxed{c}$ $\alpha > -1$; $\boxed{\times}$ $\alpha > 0$.

8. Il polinomio di Taylor di secondo grado (e di centro $x_0 = 0$) della funzione $f(x) = x+\log(1+x^2)$ è: $\boxed{a}$ $1 + x - x^2$; $\boxed{b}$ $x - x^2$; $\boxed{c}$ $1 + x + x^2$; $\boxed{\times}$ $x + x^2$.

CALCOLO I	27 gennaio 2006

1. (6 punti)
Si determini la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (e^{-3y} + 1)(2x - 1) \\ y(0) = -1 \ . \end{cases}$$

Equazione del 1° ordine non-lineare a variabili separabili.

$$\frac{dy}{dx} = (e^{-3y}+1)(2x-1) \Rightarrow \frac{dy}{e^{-3y}+1} = (2x-1)\,dx \ .$$

Integrando a sinistra e a destra:

$$\int \frac{dy}{e^{-3y}+1} = \int \frac{dy}{\frac{1}{e^{3y}}+1} = \int \frac{e^{3y}}{1+e^{3y}}\,dy = \frac{1}{3}\log(1+e^{3y}) + \text{cost.}$$

$$\int (2x-1)\,dx = x^2 - x + \text{cost} \ .$$

Dunque

$$\frac{1}{3}\log(1+e^{3y}) = x^2 - x + \text{cost}$$

$$\log(1+e^{3y}) = 3x^2 - 3x + \text{cost}$$

$$e^{3y} = e^{3x^2-3x} \cdot e^{\text{cost}} - 1$$

$$y(x) = \frac{1}{3}\log\left(e^{3x^2-3x} \cdot e^{\text{cost}} - 1\right) .$$

Imponendo il dato di Cauchy:

$$-1 = y(0) = \frac{1}{3}\log(e^{\text{cost}} - 1) \Rightarrow e^{\text{cost}} = e^{-3} + 1 \ .$$

Quindi:

$$y(x) = \frac{1}{3}\log\left[(1+e^{-3})\,e^{3x^2-3x} - 1\right] .$$

CALCOLO I	27 gennaio 2006

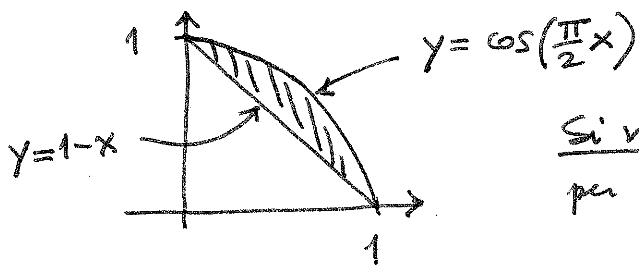
2. (6 punti)

Sia S la regione piana delimitata dal grafico della funzione $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\, x\right)$ per $0 \leq x \leq 1$ e dalla retta $r(x) = 1 - x$. Calcolare il volume del solido ottenuto facendo ruotare S attorno all'asse y.

Si integra "per gusci cilindrici", cioè:

$$V = 2\pi \int_0^1 x \left[\cos\left(\tfrac{\pi}{2} x\right) - (1-x)\right] dx .$$

[Per avere un'idea più precisa, il disegno della regione S è



Si noti: $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \geqslant 1-x$ per $x \in [0,1]$.]

Dunque

$$V = 2\pi \int_0^1 \left[x \cos\left(\tfrac{\pi}{2} x\right) - x + x^2\right] dx = 2\pi \int_0^1 x \cos\left(\tfrac{\pi}{2}x\right) dx - 2\pi \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 + 2\pi \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 .$$

Integrando per parti:

$$\int_0^1 x \cos\left(\tfrac{\pi}{2}x\right) dx = \left. x \frac{2}{\pi} \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}x\right)\right|_0^1 - \frac{2}{\pi}\int_0^1 \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}x\right) dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi^2} \left.\cos\left(\tfrac{\pi}{2}x\right)\right|_0^1 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2} .$$

In conclusione:

$$V = 2\pi \left(\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}\right) - \pi + \frac{2}{3}\pi = 4 - \frac{8}{\pi} - \frac{\pi}{3} .$$

3. **(6 punti)**
Si calcoli
$$\lim_{x\to+\infty}(3x+x^2)(e^{-2/x^2}-e^{-3/x^2})\,.$$

Siccome $(3x+x^2)\to+\infty$, $e^{-2/x^2}\to 1$, $e^{-3/x^2}\to 1$, è una forma indeterminata "$\infty\cdot 0$".

<u>1ª via</u> (riscrivere in modo più comodo):
$$(3x+x^2)(e^{-2/x^2}-e^{-3/x^2}) = (3x+x^2)e^{-2/x^2}(1-e^{-1/x^2}) =$$
$$= (3x+x^2)e^{-2/x^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{1-e^{-1/x^2}}{+1/x^2}\cdot(-1).$$
Il 2° e 4° fattore tendono a 1 $\left(\frac{e^t-1}{t}\to 1 \text{ per } t\to 0\right)$.

Dunque rimane
$$-\frac{3x+x^2}{x^2}\cdot(-1) = \frac{\cancel{x^2}(1+3/x)}{\cancel{x^2}} \to 1.$$

<u>2ª via</u> (Taylor):
Essendo $e^t = 1+t+o(t)$ per $t\to 0$, si ha
$$e^{-2/x^2} = 1-2/x^2+o(x^{-2}), \quad e^{-3/x^2} = 1-3/x^2+o(x^{-2}),$$
e allora
$$(3x+x^2)(e^{-2/x^2}-e^{-3/x^2}) = (3x+x^2)\left(\cancel{1}-\frac{2}{x^2}-\cancel{1}+\frac{3}{x^2}+o(x^{-2})\right) =$$
$$= (3x+x^2)\left(\frac{1}{x^2}+o(x^{-2})\right) = \frac{3x+x^2}{x^2}\Big(1+\underbrace{\frac{o(x^{-2})}{x^{-2}}}_{0}\Big) \to 1.$$

<u>3ª via</u> (de l'Hôpital):
Riscrivo come "$\frac{0}{0}$": $(3x+x^2)(e^{-2/x^2}-e^{-3/x^2}) = \dfrac{e^{-2/x^2}-e^{-3/x^2}}{\frac{1}{(3x+x^2)}}$.

Derivo:
$$\frac{4x^{-3}e^{-2/x^2}-6x^{-3}e^{-3/x^2}}{-\frac{2x+3}{(3x+x^2)^2}} = -\frac{4e^{-2/x^2}-6e^{-3/x^2}}{2x^4+3x^3}\cdot(x^4+6x^3+9x^2) =$$
Siccome $-(4e^{-2/x^2}-6e^{-3/x^2})\to 2$ e $\dfrac{x^4+6x^3+9x^2}{2x^4+3x^3}\to\dfrac{1}{2}$,
il limite richiesto è $2\cdot\frac{1}{2} = 1$.