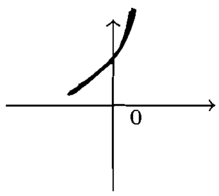
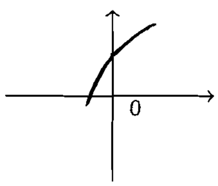
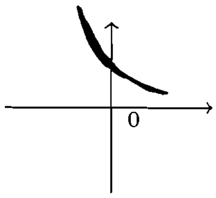
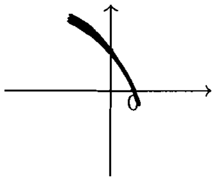
CALCOLO 1		10 luglio 2007
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

1. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Allora $\int_1^2 f(x^2)\,dx =$ $\boxed{a}$ $\int_1^4 2tf(t)\,dt$; $\boxed{\cancel{b}}$ $\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{t}} f(t)\,dt$; $\boxed{c}$ $\int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{t}} f(t)\,dt$; $\boxed{d}$ $\int_1^2 2tf(t)\,dt$.

2. Qual è il grafico vicino a $x_0 = 0$ della soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3e^x - y^2 \\ y(0) = 1\ ? \end{cases}$$

$\boxed{a}$  ; $\boxed{\cancel{b}}$  ; $\boxed{c}$  ; $\boxed{d}$  .

3. Sia $a_n > 0$ per ogni $n \geq 0$. Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1/2$ quale delle seguenti serie è convergente? $\boxed{\cancel{a}}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{a_n}$; $\boxed{b}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{1+a_n}$; $\boxed{c}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+a_n}{a_n}$; $\boxed{d}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n}$.

4. I numeri complessi z soluzioni dell'equazione $z(4 - \overline{z}) = 4\sqrt{3}i$ sono: $\boxed{\cancel{a}}$ $z = 1 + \sqrt{3}i$ e $z = 3 + \sqrt{3}i$; $\boxed{b}$ $z = -1$ e $z = 2$; $\boxed{c}$ $z = 1 - \sqrt{3}i$ e $z = 3 - \sqrt{3}i$; $\boxed{d}$ $z = -2$ e $z = 1$.

5. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\cos n + n^2}{(n + \log n)^2} =$ $\boxed{\cancel{a}}$ 1; $\boxed{b}$ 1/2; $\boxed{c}$ $+\infty$; $\boxed{d}$ 0.

6. I valori del parametro reale $x > 0$ per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n \log n + 1)3^n}{(2x)^n}$ è convergente sono: $\boxed{\cancel{a}}$ $x > 3/2$; $\boxed{b}$ $0 < x < 2/3$; $\boxed{c}$ $x > 2/3$; $\boxed{d}$ $0 < x < 3/2$.

7. L'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \frac{e^{-x}}{ax+1}$ nel punto $(0, f(0))$ è $y = 2x + 1$ se: $\boxed{a}$ $a = -2$; $\boxed{b}$ $a = 0$; $\boxed{\cancel{c}}$ $a = -3$; $\boxed{d}$ $a = 1$.

8. L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale $\int_0^1 \frac{x - \log(1+x)}{x^\alpha (e^x - 1)}\,dx$ è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente è dato da: $\boxed{a}$ $3 < \alpha < 4$; $\boxed{b}$ $0 < \alpha < 1$; $\boxed{\cancel{c}}$ $1 < \alpha < 2$; $\boxed{d}$ $2 < \alpha < 3$.

1. (6 punti)

Data la funzione $f(x) = \sin(2x)e^{-x}$, se ne calcoli il polinomio di Taylor di terzo grado e di centro $x_0 = 0$.

Si ha $\sin w = w - w^3/6 + o(w^3)$, dunque

$$\sin(2x) = 2x - \frac{8x^3}{6} + o(x^3) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3).$$

Poi

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Dunque

$$f(x) = \sin(2x)\cdot e^{-x} = \left(2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\right)\cdot\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) =$$

$$= 2x - 2x^2 + x^3 + o(x^3) - \frac{4}{3}x^3 = 2x - 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

Il polinomio richiesto è quindi $P_3(x) = 2x - 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$.

Calcolando le derivate:

$$f'(x) = 2\cos(2x)e^{-x} - \sin(2x)e^{-x};$$

$$f''(x) = -4\,\mathrm{sen}(2x)e^{-x} - 2\cos(2x)e^{-x} - 2\cos(2x)e^{-x} + \sin(2x)e^{-x} =$$

$$= -3\,\mathrm{sen}(2x)e^{-x} - 4\cos(2x)e^{-x};$$

$$f'''(x) = -6\cos(2x)e^{-x} + 3\,\mathrm{sen}(2x)e^{-x} + 8\,\mathrm{sen}(2x)e^{-x} + 4\cos(2x)e^{-x} =$$

$$= -2\cos(2x)e^{-x} + 11\,\mathrm{sen}(2x)e^{-x}.$$

Dunque $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = -4$, $f'''(0) = -2$, e si ottiene il polinomio di Taylor:

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 =$$

$$= 2x - 2x^2 - \frac{1}{3}x^3.$$

CALCOLO I	10 luglio 2007

2. (6 punti)

Sia S la regione piana delimitata dal grafico della funzione $f(x) = \frac{x^3}{2}$, dalle rette verticali $x = 1$ e $x = 2$ e dall'asse x. Calcolare l'area totale della superficie del solido generato facendo ruotare S attorno all'asse x.

La funzione $f(x)$ vale $1/2$ per $x=1$ e 4 per $x=2$. Le due aree circolari che "chiudono" a destra e a sinistra la superficie di rotazione valgono dunque $\frac{1}{4}\pi$ e 16π.

Poi la formula per l'area della superficie generata dal grafico di $f(x)$ dà:

$$\text{area} = 2\pi \int_1^2 f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx .$$

Siccome $f'(x) = 3x^2/2$, si ha

$$\text{area} = 2\pi \int_1^2 \frac{x^3}{2}\sqrt{1+\frac{9x^4}{4}}\,dx = \pi \int_1^2 x^3 \frac{\sqrt{4+9x^4}}{2}\,dx =$$

$$\begin{cases} x^4 = t \\ 4x^3dx = dt \\ x=1 \to t=1 \\ x=2 \to t=16 \end{cases}$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{4}\int_1^{16}\sqrt{4+9t}\,dt = \frac{\pi}{8}(4+9t)^{3/2}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}\Big|_1^{16} =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{72}\left[(148)^{3/2}-(13)^{3/2}\right] = \frac{\pi}{108}\left[(148)^{3/2}-(13)^{3/2}\right].$$

Il risultato globale è quindi:

$$\text{area totale} = \frac{1}{4}\pi + 16\pi + \frac{\pi}{108}\left[(148)^{3/2}-(13)^{3/2}\right].$$

3. (6 punti)

Sia data la funzione $f(x) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{1+x^2}\right)$. Se ne disegni qualitativamente il grafico [in particolare, motivando le risposte: insieme di definizione, limiti a $+\infty$ e a $-\infty$ e negli eventuali punti di non definizione, segno, crescenza e decrescenza; **non** è richiesto lo studio di convessità/concavità].

Siccome $1+x^2 \geq 1 > 0$, il denominatore non si annulla mai e la funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre, $f(x) = f(-x)$ (la funzione è pari), quindi basta studiarla per $x \geq 0$.

Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{2\pi}{1+x^2}\right) = \cos 0 = 1.$$

Poi $f(0) = \cos(2\pi) = 1$. Siccome $\cos w = 0$ per $w = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots$, gli annullamenti di $f(x)$ si hanno per

$$\frac{2\pi}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 1+x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{3}\ ; \quad \frac{2\pi}{1+x^2} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow 1+x^2 = 4/3 \Rightarrow x = 1/\sqrt{3}\ ;$$

$$\frac{2\pi}{1+x^2} = \frac{5\pi}{2} \Rightarrow 1+x^2 = 4/5\ ;\ \text{impossibile}.$$

Così $f(x) > 0$ per $0 \leq x < 1/\sqrt{3}$, $f(x) < 0$ per $1/\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$, $f(x) > 0$ per $x > \sqrt{3}$.

La derivata prima vale

$$f'(x) = -\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{1+x^2}\right) \cdot 2\pi \cdot (-1)\frac{2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4\pi x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{1+x^2}\right).$$

Dunque si annulla per $x = 0$, ed è positiva per $0 < \frac{2\pi}{1+x^2} < \pi$, negativa per $\pi < \frac{2\pi}{1+x^2} < 2\pi$ (dato che $\mathrm{sen}\, w > 0$ per $0 < w < \pi$, $\mathrm{sen}\, w < 0$ per $\pi < w < 2\pi$).

Quindi $f'(x) > 0$ per $1+x^2 > 2 \Rightarrow x > 1$; $f'(x) < 0$ per $1+x^2 < 2 \Rightarrow x < 1$; $f'(1) = 0$. Dunque $f(x)$ cresce per $x > 1$, decresce per $0 < x < 1$.

Il grafico (qualitativo...) è (si noti $f(1) = \cos\pi = -1$):