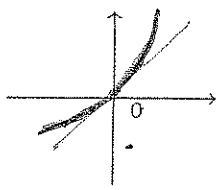
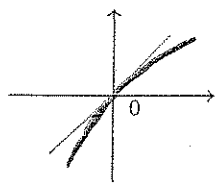
CALCOLO 1		26 gennaio 2007
Cognome:	Nome:	Matricola:

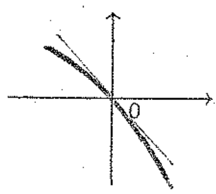
- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

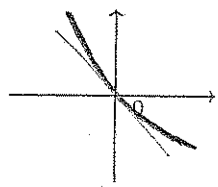
1. L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{(e^{2x}-1)(1-\cos x)^\alpha}\,dx$ è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente è dato da: $\boxed{a}$ $1<\alpha<2$; $\boxed{b}$ $\frac{1}{2}<\alpha<\frac{3}{2}$; $\boxed{c}$ $\frac{1}{2}<\alpha<1$; $\boxed{d}$ $\frac{3}{2}<\alpha<\frac{5}{2}$.

2. Sia $f(x)$ una funzione derivabile due volte con $f(0)=1$, $f'(0)=-1$, $f''(0)=0$. Il grafico di $g(x)=\frac{1-f(x)}{f(x)}$ vicino a $x=0$ è:

$\boxed{a}$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxed{c}$ 

; $\boxed{d}$ 

.

3. Siano $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$ e $g(y)=e^{1/y}$. Allora la derivata della funzione composta $(g\circ f)(x)$ nel punto $x_0=1$ vale: $\boxed{a}$ $\dfrac{-e^{2/3}}{18}$; $\boxed{b}$ $\dfrac{-e^{\sqrt{2}}}{4\sqrt{2}}$; $\boxed{c}$ $\dfrac{e^{1/2}}{4}$; $\boxed{d}$ $\dfrac{e^{\sqrt{3/2}}}{4\sqrt{6}}$.

4. Determinare i numeri complessi soluzioni dell'equazione $i\,\overline{z}\,\mathrm{Im}z = z$? $\boxed{a}$ 0 e -1; $\boxed{b}$ 0 e 1; $\boxed{c}$ 0, $1+i$ e $1-i$; $\boxed{d}$ 0, $-1+i$ e $-1-i$.

5. Per quali valori dei parametri $\alpha\in\mathbf{R}$ e $\beta>0$ si ha che $f(x)=\begin{cases} x^2+3x+\alpha & \text{per } x\le 0 \\ \log(\beta+2x) & \text{per } x>0\end{cases}$ è continua e derivabile in $x_0=0$? $\boxed{a}$ $\alpha=\log(3/2)$, $\beta=2/3$; $\boxed{b}$ $\alpha=\log(2/3)$, $\beta=2/3$; $\boxed{c}$ $\alpha=\log(3/2)$, $\beta=3/2$; $\boxed{d}$ $\alpha=\log(2/3)$, $\beta=3/2$.

6. Sia $f(x)$ una funzione continua che soddisfa $f(0)=-1$ e $f(1)=0$. Allora è sempre vero che esiste un valore $x_0\in(0,1)$ per cui: $\boxed{a}$ $f(x_0)+2+x_0^2=0$; $\boxed{b}$ $f(x_0)=2x_0^2$; $\boxed{c}$ $f(x_0)+2x_0^2=0$; $\boxed{d}$ $f(x_0)=2+x_0^2$.

7. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x+e^{2x}}{2e^x+x^3}=$ $\boxed{a}$ 2; $\boxed{b}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{c}$ $+\infty$; $\boxed{d}$ 0.

8. Sia $f(x)$ una funzione derivabile con derivata continua, che soddisfa $f(\pi/2)=0$. Allora si ha $\int_0^{\pi/2} f(x)\cos(3x)\,dx=$ $\boxed{a}$ $3\int_0^{\pi/2} f(x)\sin(3x)\,dx$; $\boxed{b}$ $\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} f'(x)\cos(3x)\,dx$; $\boxed{c}$ $-\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} f'(x)\sin(3x)\,dx$; $\boxed{d}$ $-3\int_0^{\pi/2} f(x)\cos(3x)\,dx$.

CALCOLO I	26 gennaio 2007

1. (6 punti)
Sia $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \left| \frac{x^2 - 1}{x + 2} \right| .$$

Se ne disegni qualitativamente il grafico [in particolare, motivando le risposte: insieme di definizione, limiti a $+\infty$ e a $-\infty$ e nei punti di non definizione, asintoti verticali ed obliqui, crescenza e decrescenza, convessità e concavità. Suggerimento: cominciare studiando $\frac{x^2-1}{x+2}$...].

$g(x) = \frac{x^2-1}{x+2}$ $\quad D(g) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ $\quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

$g(x)$ ha un asintoto verticale in $x = -2$ $\quad \lim_{x \to -2^-} g(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x \to -2^+} g(x) = +\infty$

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2-1}{x^2+2x} = 1$ $\quad \lim_{x \to \pm\infty} [g(x) - x] = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2-1}{x+2} - x \right) = -2$

$g(x)$ ha un asintoto obliquo di equazione $y = x - 2$

$$g'(x) = \frac{2x(x+2) - (x^2-1)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+4x-x^2+1}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$$

$g'(x) = 0 \iff x^2+4x+1 = 0 \qquad x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$

Se $x \in (-\infty, -2-\sqrt{3})$ $\quad g'(x) > 0 \leadsto g(x)$ è crescente

Se $x \in (-2-\sqrt{3}, -2) \cup (-2, -2+\sqrt{3})$ $\quad g'(x) < 0 \leadsto g(x)$ è decrescente

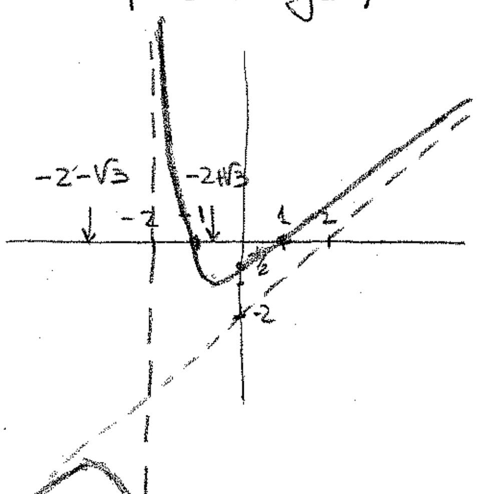
Se $x \in (-2+\sqrt{3}, +\infty)$ $\quad g'(x) > 0 \leadsto g(x)$ è crescente.

$$g''(x) = \frac{(2x+4)(x+2)^2 - 2(x+2)(x^2+4x+1)}{(x+2)^4} = \frac{2x^2+8x+8-2x^2-8x-2}{(x+2)^3} = \frac{6}{(x+2)^3}$$

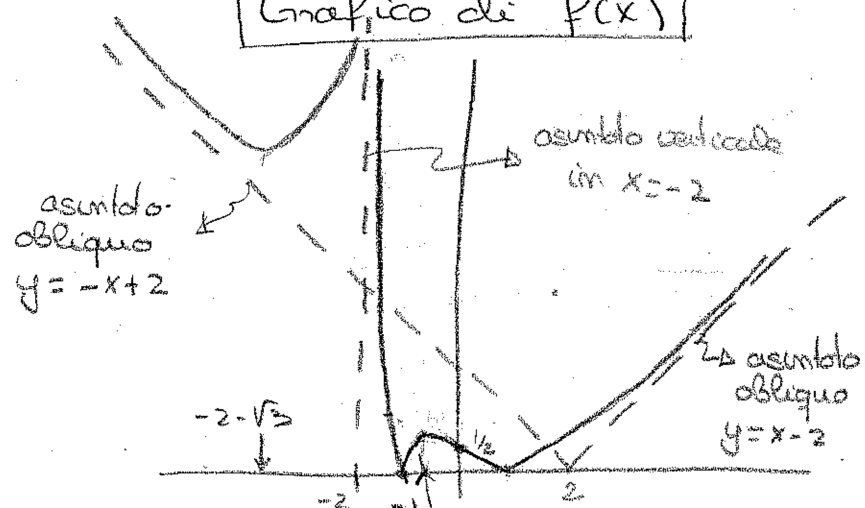
Se $x \in (-\infty, -2)$ $\quad g''(x) < 0 \leadsto g(x)$ è concava verso il basso

Se $x \in (-2, +\infty)$ $\quad g''(x) > 0 \leadsto g(x)$ è concava verso l'alto.

Grafico di g(x)



$\boxed{\text{Grafico di } f(x)}$



2. (6 punti)
Si determini per quali valori del parametro $x \geq 0$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3e^{nx} + n \log n}{2^n + n}$$

è convergente.

La serie è a termini positivi.

Per $x=0$: l'addendo $n\log n$ va più velocemente all'infinito di $3e^{n\cdot 0} = 3$, e l'addendo 2^n va più velocemente all'infinito di n. Dunque, usando il criterio di confronto asintotico, la serie assegnata si comporta come la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\log n}{2^n}$.

Applicando il criterio del rapporto si ha:

$$\frac{(n+1)\log(n+1)}{n\log n} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1/2,$$

per cui la serie è convergente.

Per $x>0$: l'addendo $3e^{nx}$ va più velocemente all'infinito di $n\log n$. Dunque, usando il criterio di confronto asintotico, la serie assegnata si comporta come la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3e^{nx}}{2^n}$.

Applicando il criterio del rapporto si ha:

$$\frac{3e^{(n+1)x}}{3e^{nx}} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} \longrightarrow \frac{e^x}{2}.$$

Quindi la serie converge per $\frac{e^x}{2} < 1$, cioè $x < \log 2$, e diverge per $\frac{e^x}{2} > 1$, cioè $x > \log 2$.

Per $x = \log 2$, la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 2^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 3 = +\infty$.

Conclusione: la serie assegnata converge per $0 \leq x < \log 2$.

CALCOLO I	26 gennaio 2007

3. (6 punti)
Si determini la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 8y = e^{-2x} \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 0 \,. \end{cases}$$

Troviamo per prima la soluzione generale dell'equazione omogenea. Il polinomio associato è $r^2 - 4r + 8$, e si ha

$$r^2 - 4r + 8 = 0 \quad \text{per} \quad r = 2 \mp \sqrt{4-8} = 2 \mp 2i \,.$$

La soluzione generale dell'omogenea è quindi

$$c_1 e^{2x} \operatorname{sen}(2x) + c_2 e^{2x} \cos(2x) \,.$$

Cerchiamo una soluzione particolare della non-omogenea, della forma $y_*(x) = Ae^{-2x}$. Si ha $y_*'(x) = -2Ae^{-2x}$, $y_*''(x) = 4Ae^{-2x}$, per cui

$$y_*'' - 4y_*' + 8y_* = 4Ae^{-2x} + 8Ae^{-2x} + 8Ae^{-2x} = 20Ae^{-2x} \,,$$

da cui si ricava $A = 1/20$.
La soluzione generale della non-omogenea è dunque

$$c_1 e^{2x} \operatorname{sen}(2x) + c_2 e^{2x} \cos(2x) + \frac{1}{20} e^{-2x} \,.$$

Imponendo i dati di Cauchy si ha

$$-1 = y(0) = c_2 + \frac{1}{20} \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{21}{20} \,.$$

$$0 = y'(0) = \Big[2c_1 e^{2x} \operatorname{sen}(2x) + 2c_1 e^{2x} \cos(2x) + 2c_2 e^{2x} \cos(2x) - 2c_2 e^{2x} \operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{10} e^{-2x} \Big]_{x=0} = 2c_1 + 2c_2 - \frac{1}{10} \,,$$

quindi $c_1 = \frac{11}{10}$.
La soluzione è dunque

$$y(x) = \frac{11}{10} e^{2x} \operatorname{sen}(2x) - \frac{21}{20} e^{2x} \cos(2x) + \frac{1}{20} e^{-2x} \,.$$