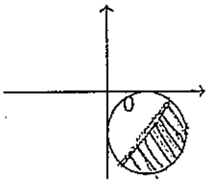
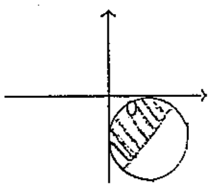
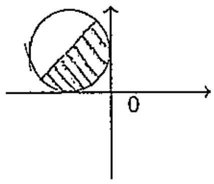
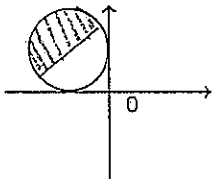
CALCOLO 1		24 aprile 2008
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

1. L'insieme dei numeri complessi z tali che $|z-i| < |z+1-2i|$ e $|z+1-i| < 1$ è la regione tratteggiata:

$\boxed{a}$  ; $\boxed{b}$  ; $\boxed{c}$  ; $\boxed{d}$  .

2. I numeri complessi soluzioni di $5\overline{z} - z = z\overline{z} + 6i$ sono: $\boxed{a}$ $3-2\sqrt{2}+i$ e $3+2\sqrt{2}+i$; $\boxed{b}$ $2-\sqrt{3}-i$ e $2+\sqrt{3}-i$; $\boxed{c}$ $2-\sqrt{3}+i$ e $2+\sqrt{3}+i$; $\boxed{d}$ $3-2\sqrt{2}-i$ e $3+2\sqrt{2}-i$.

3. L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3+n^\alpha 2^n}$ è convergente è: $\boxed{a}$ nessun valore; $\boxed{b}$ $\alpha > 1$; $\boxed{c}$ $0 < \alpha < 1$; $\boxed{d}$ $\alpha > 0$.

4. Determinare i valori dei parametri reali a e b affinché la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{2-2x} - ax & \text{per } x < 1 \\ \log(3x-2) - bx^2 & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$$

sia continua e derivabile nel punto $x_0 = 1$. $\boxed{a}$ $a=-3,\ b=-4$; $\boxed{b}$ $a=-2,\ b=3$; $\boxed{c}$ $a=7,\ b=6$; $\boxed{d}$ $a=-2,\ b=-1$.

5. Il valore massimo assoluto della funzione $f(x) = x^2e^{-4x}$ nell'intervallo $[0,1]$ è: $\boxed{a}$ $\frac{1}{2e}$; $\boxed{b}$ $\frac{1}{e^2}$; $\boxed{c}$ $\frac{1}{4e^2}$; $\boxed{d}$ $\frac{1}{4e}$.

6. Sia $f(x)$ una funzione tale che $2 \leq f''(x) \leq 3$ per ogni $x \in [0,1]$. Sia $P_1(x)$ il polinomio di Taylor della funzione $f(x)$ di centro $x_0 = 0$ e di grado 1. Allora:
$\boxed{a}$ $\frac{1}{6} \leq \int_0^1 [f(x) - P_1(x)]\,dx \leq \frac{1}{3}$; $\boxed{b}$ $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 [f(x) - P_1(x)]\,dx \leq \frac{2}{3}$;
$\boxed{c}$ $\frac{1}{12} \leq \int_0^1 [f(x) - P_1(x)]\,dx \leq \frac{1}{6}$; $\boxed{d}$ $\frac{1}{3} \leq \int_0^1 [f(x) - P_1(x)]\,dx \leq \frac{1}{2}$.

7. Sia $g(x) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua con $g(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ e tale che $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}g(x) = 1$. Allora è sempre vero che: $\boxed{a}$ $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx \leq 1$; $\boxed{b}$ $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ è divergente; $\boxed{c}$ $g(x) = 1$ ha soluzione per $x > 0$; $\boxed{d}$ $\sum_{n=1}^{\infty} g(n)$ è convergente.

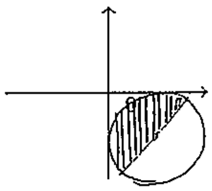
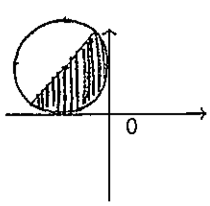
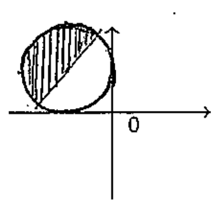
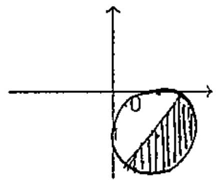
8. L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale $\int_0^1 \frac{\sin^2(2x)}{x^\alpha(2+x)}dx$ è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente è: $\boxed{a}$ $1 < \alpha < 3/2$; $\boxed{b}$ $2 < \alpha < 3$; $\boxed{c}$ $3 < \alpha < 4$; $\boxed{d}$ $1/2 < \alpha < 1$.

CALCOLO 1		24 aprile 2008
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

1. L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale $\int_0^1 \frac{\log(1+x^{2\alpha})}{x^3(1+2x)}dx$ è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente è: [a] $3 < \alpha < 4$; [b] $1/2 < \alpha < 1$; [X] $1 < \alpha < 3/2$; [d] $2 < \alpha < 3$.

2. L'insieme dei numeri complessi z tali che $|z - i| > |z + 1 - 2i|$ e $|z + 1 - i| < 1$ è la regione tratteggiata:

[a]  ; [b]  ; [X]  ; [d]  .

3. Sia $f(x)$ una funzione tale che $1 \le f''(x) \le 2$ per ogni $x \in [0, 1]$. Sia $P_1(x)$ il polinomio di Taylor della funzione $f(x)$ di centro $x_0 = 0$ e di grado 1. Allora:
[a] $\frac{1}{12} \le \int_0^1 [f(x) - P_1(x)]\,dx \le \frac{1}{6}$; [b] $\frac{1}{3} \le \int_0^1 [f(x) - P_1(x)]\,dx \le \frac{1}{2}$;
[X] $\frac{1}{6} \le \int_0^1 [f(x) - P_1(x)]\,dx \le \frac{1}{3}$; [d] $\frac{1}{2} \le \int_0^1 [f(x) - P_1(x)]\,dx \le \frac{2}{3}$.

4. I numeri complessi soluzioni di $5z + \bar{z} = z\bar{z} + 4i$ sono: [a] $2 - \sqrt{3} + i$ e $2 + \sqrt{3} + i$; [b] $3 - 2\sqrt{2} - i$ e $3 + 2\sqrt{2} - i$; [X] $3 - 2\sqrt{2} + i$ e $3 + 2\sqrt{2} + i$; [d] $2 - \sqrt{3} - i$ e $2 + \sqrt{3} - i$.

5. Sia $g(x) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua con $g(x) \ge 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ e tale che $\lim_{x\to+\infty} xg(x) = 1$. Allora è sempre vero che: [a] $g(x) = 1$ ha soluzione per $x > 0$; [b] $\sum_{n=1}^{\infty} g(n)$ è convergente; [c] $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx \le 1$; [X] $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ è divergente.

6. Il valore massimo assoluto della funzione $f(x) = xe^{-2x}$ nell'intervallo $[0, 1]$ è: [a] $\frac{1}{4e^2}$; [b] $\frac{1}{4e}$; [X] $\frac{1}{2e}$; [d] $\frac{1}{e^2}$.

7. L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^\alpha + n^2 2^n}$ è convergente è: [a] $0 < \alpha < 1$; [X] $\alpha > 0$; [c] nessun valore; [d] $\alpha > 1$.

8. Determinare i valori dei parametri reali a e b affinché la funzione

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - e^{x-1} & \text{per } x < 1 \\ bx - \log(3x - 2) & \text{per } x \ge 1 \end{cases}$$

sia continua e derivabile nel punto $x_0 = 1$. [a] $a = 7$, $b = 6$; [b] $a = -2$, $b = -1$; [X] $a = -3$, $b = -4$; [d] $a = -2$, $b = 3$.

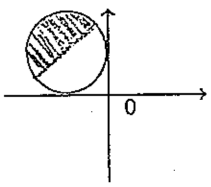
CALCOLO 1		24 aprile 2008
Cognome:	Nome:	Matricola:

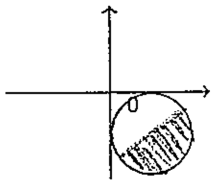
- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

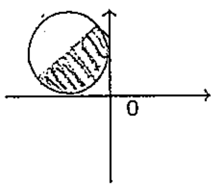
1. Sia $g(x) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua con $g(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ e tale che $\lim_{x\to+\infty} x^2 g(x) = 0$. Allora è sempre vero che: $\boxed{a}$ $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ è divergente; $\boxed{b}$ $g(x) = 1$ ha soluzione per $x > 0$; $\boxtimes$ $\sum_{n=1}^{\infty} g(n)$ è convergente; $\boxed{d}$ $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx \leq 1$.

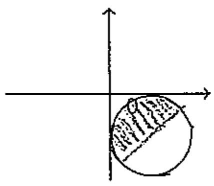
2. Il valore massimo assoluto della funzione $f(x) = xe^{-4x}$ nell'intervallo $[0,1]$ è: $\boxed{a}$ $\frac{1}{e^2}$; $\boxed{b}$ $\frac{1}{4e^2}$; $\boxtimes$ $\frac{1}{4e}$; $\boxed{d}$ $\frac{1}{2e}$.

3. L'insieme dei numeri complessi z tali che $|z-1| > |z-2+i|$ e $|z-1+i| < 1$ è la regione tratteggiata:

$\boxed{a}$ 

; $\boxtimes$ 

; $\boxed{c}$ 

; $\boxed{d}$  .

4. Sia $f(x)$ una funzione tale che $1 \leq f''(x) \leq 2$ per ogni $x \in [0,1]$. Sia $P_1(x)$ il polinomio di Taylor della funzione $f(x)$ di centro $x_0 = 0$ e di grado 1. Allora:
$\boxed{a}$ $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 [f(x) - P_1(x)]\,dx \leq \frac{2}{3}$; $\boxed{b}$ $\frac{1}{12} \leq \int_0^1 [f(x) - P_1(x)]\,dx \leq \frac{1}{6}$;
$\boxed{c}$ $\frac{1}{3} \leq \int_0^1 [f(x) - P_1(x)]\,dx \leq \frac{1}{2}$; $\boxtimes$ $\frac{1}{6} \leq \int_0^1 [f(x) - P_1(x)]\,dx \leq \frac{1}{3}$.

5. Determinare i valori dei parametri reali a e b affinché la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x-2} + ax & \text{per } x \geq 1 \\ \log(2x-1) + bx^2 & \text{per } x < 1 \end{cases}$$

sia continua e derivabile nel punto $x_0 = 1$. $\boxed{a}$ $a = -2,\ b = 3$; $\boxed{b}$ $a = 7,\ b = 6$; $\boxtimes$ $a = -2,\ b = -1$; $\boxed{d}$ $a = -3,\ b = -4$.

6. L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale $\int_0^1 \frac{(2x+1)x}{\sin^2(x^\alpha)}dx$ è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente è: $\boxed{a}$ $2 < \alpha < 3$; $\boxed{b}$ $3 < \alpha < 4$; $\boxtimes$ $1/2 < \alpha < 1$; $\boxed{d}$ $1 < \alpha < 3/2$.

7. I numeri complessi soluzioni di $z + 5\overline{z} = z\overline{z} + 4i$ sono: $\boxed{a}$ $2-\sqrt{3}-i$ e $2+\sqrt{3}-i$; $\boxed{b}$ $2-\sqrt{3}+i$ e $2+\sqrt{3}+i$; $\boxtimes$ $3-2\sqrt{2}-i$ e $3+2\sqrt{2}-i$; $\boxed{d}$ $3-2\sqrt{2}+i$ e $3+2\sqrt{2}+i$.

8. L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^\alpha}{1+3^n}$ è convergente è: $\boxed{a}$ $\alpha > 1$; $\boxed{b}$ $0 < \alpha < 1$; $\boxtimes$ $\alpha > 0$; $\boxed{d}$ nessun valore.

CALCOLO 1		24 aprile 2008
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

1. Determinare i valori dei parametri reali a e b affinché la funzione

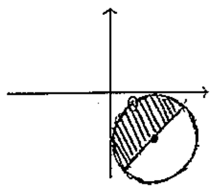
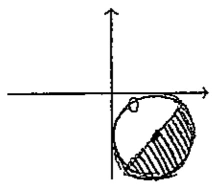
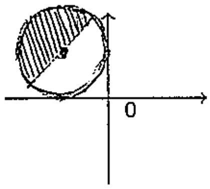
$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} - ax^2 & \text{per } x \geq 1 \\ \log(2x-1) + bx & \text{per } x < 1 \end{cases}$$

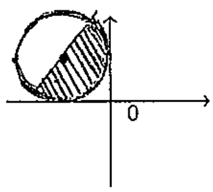
sia continua e derivabile nel punto $x_0 = 1$. $\boxed{a}$ $a = -3$, $b = -4$; $\boxed{b}$ $a = -2$, $b = 3$; $\boxed{c}$ $a = 7$, $b = 6$; $\boxed{d}$ $a = -2$, $b = -1$.

2. L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale $\int_0^1 \frac{\log(1+x^{2\alpha})}{x^3(1+2x)}dx$ è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente è: $\boxed{a}$ $1 < \alpha < 3/2$; $\boxed{b}$ $2 < \alpha < 3$; $\boxed{c}$ $3 < \alpha < 4$; $\boxed{d}$ $1/2 < \alpha < 1$.

3. Il valore massimo assoluto della funzione $f(x) = x^2 e^{-2x}$ nell'intervallo $[0, 2]$ è: $\boxed{a}$ $\frac{1}{2e}$; $\boxed{b}$ $\frac{1}{e^2}$; $\boxed{c}$ $\frac{1}{4e^2}$; $\boxed{d}$ $\frac{1}{4e}$.

4. L'insieme dei numeri complessi z tali che $|z - i| < |z + 1 - 2i|$ e $|z + 1 - i| < 1$ è la regione tratteggiata:

$\boxed{a}$  ; $\boxed{b}$  ; $\boxed{c}$ 

; $\boxed{d}$ 

.

5. L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3 + n^{\alpha} 2^n}$ è convergente è: $\boxed{a}$ nessun valore; $\boxed{b}$ $\alpha > 1$; $\boxed{c}$ $0 < \alpha < 1$; $\boxed{d}$ $\alpha > 0$.

6. Sia $g(x) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua con $g(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ e tale che $\lim_{x \to +\infty} x^2 g(x) = 0$. Allora è sempre vero che: $\boxed{a}$ $\int_1^{+\infty} g(x)\, dx \leq 1$; $\boxed{b}$ $\int_1^{+\infty} g(x)\, dx$ è divergente; $\boxed{c}$ $g(x) = 1$ ha soluzione per $x > 0$; $\boxed{d}$ $\sum_{n=1}^{\infty} g(n)$ è convergente.

7. Sia $f(x)$ una funzione tale che $2 \leq f''(x) \leq 3$ per ogni $x \in [0, 1]$. Sia $P_1(x)$ il polinomio di Taylor della funzione $f(x)$ di centro $x_0 = 0$ e di grado 1. Allora:
$\boxed{a}$ $\frac{1}{6} \leq \int_0^1 [f(x) - P_1(x)]\, dx \leq \frac{1}{3}$; $\boxed{b}$ $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 [f(x) - P_1(x)]\, dx \leq \frac{2}{3}$;
$\boxed{c}$ $\frac{1}{12} \leq \int_0^1 [f(x) - P_1(x)]\, dx \leq \frac{1}{6}$; $\boxed{d}$ $\frac{1}{3} \leq \int_0^1 [f(x) - P_1(x)]\, dx \leq \frac{1}{2}$.

8. I numeri complessi soluzioni di $z + 5\bar{z} = z\bar{z} + 4i$ sono: $\boxed{a}$ $3 - 2\sqrt{2} + i$ e $3 + 2\sqrt{2} + i$; $\boxed{b}$ $2 - \sqrt{3} - i$ e $2 + \sqrt{3} - i$; $\boxed{c}$ $2 - \sqrt{3} + i$ e $2 + \sqrt{3} + i$; $\boxed{d}$ $3 - 2\sqrt{2} - i$ e $3 + 2\sqrt{2} - i$.

CALCOLO 1		24 aprile 2008
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

1. Sia $f(x)$ una funzione tale che $\frac{1}{2} \leq f''(x) \leq 1$ per ogni $x \in [0,1]$. Sia $P_1(x)$ il polinomio di Taylor della funzione $f(x)$ di centro $x_0 = 0$ e di grado 1. Allora:
$\boxed{a}$ $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 [f(x) - P_1(x)]\, dx \leq \frac{2}{3}$; $\boxtimes$ $\frac{1}{12} \leq \int_0^1 [f(x) - P_1(x)]\, dx \leq \frac{1}{6}$;
$\boxed{c}$ $\frac{1}{3} \leq \int_0^1 [f(x) - P_1(x)]\, dx \leq \frac{1}{2}$; $\boxed{d}$ $\frac{1}{6} \leq \int_0^1 [f(x) - P_1(x)]\, dx \leq \frac{1}{3}$.

2. L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^\alpha + n^2 2^n}$ è convergente è:
$\boxed{a}$ $\alpha > 1$; $\boxed{b}$ $0 < \alpha < 1$; $\boxtimes$ $\alpha > 0$; $\boxed{d}$ nessun valore.

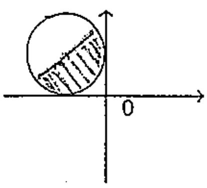
3. Determinare i valori dei parametri reali a e b affinché la funzione

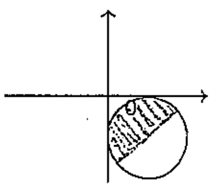
$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - e^{x-1} & \text{per } x < 1 \\ bx - \log(3x-2) & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$$

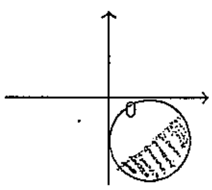
sia continua e derivabile nel punto $x_0 = 1$. $\boxed{a}$ $a = -2$, $b = 3$; $\boxed{b}$ $a = 7$, $b = 6$; $\boxed{c}$ $a = -2$, $b = -1$; $\boxtimes$ $a = -3$, $b = -4$.

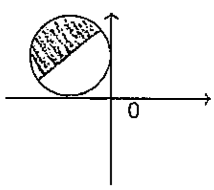
4. Sia $g(x) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua con $g(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ e tale che $\lim_{x\to+\infty} x g(x) = 1$. Allora è sempre vero che: $\boxtimes$ $\int_1^{+\infty} g(x)\, dx$ è divergente; $\boxed{b}$ $g(x) = 1$ ha soluzione per $x > 0$; $\boxed{c}$ $\sum_{n=1}^{\infty} g(n)$ è convergente; $\boxed{d}$ $\int_1^{+\infty} g(x)\, dx \leq 1$.

5. L'insieme dei numeri complessi z tali che $|z-1| > |z-2+i|$ e $|z-1+i| < 1$ è la regione tratteggiata:

$\boxed{a}$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxtimes$ 

; $\boxed{d}$ 

.

6. I numeri complessi soluzioni di $5z - \bar{z} = z\bar{z} + 6i$ sono: $\boxed{a}$ $2-\sqrt{3}-i$ e $2+\sqrt{3}-i$; $\boxtimes$ $2-\sqrt{3}+i$ e $2+\sqrt{3}+i$; $\boxed{c}$ $3-2\sqrt{2}-i$ e $3+2\sqrt{2}-i$; $\boxed{d}$ $3-2\sqrt{2}+i$ e $3+2\sqrt{2}+i$.

7. L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale $\int_0^1 \frac{(x^2+1)x^3}{\log(1+2x^\alpha)} dx$ è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente è: $\boxed{a}$ $2 < \alpha < 3$; $\boxtimes$ $3 < \alpha < 4$; $\boxed{c}$ $1/2 < \alpha < 1$; $\boxed{d}$ $1 < \alpha < 3/2$.

8. Il valore massimo assoluto della funzione $f(x) = xe^{-4x}$ nell'intervallo $[0,1]$ è: $\boxed{a}$ $\frac{1}{e^2}$; $\boxed{b}$ $\frac{1}{4e^2}$; $\boxtimes$ $\frac{1}{4e}$; $\boxed{d}$ $\frac{1}{2e}$.

CALCOLO 1		24 aprile 2008
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

1. Il valore massimo assoluto della funzione $f(x) = x^2e^{-2x}$ nell'intervallo $[0,2]$ è: $\boxed{a}$ $\frac{1}{4e}$; $\boxed{b}$ $\frac{1}{2e}$; ☒ $\frac{1}{e^2}$; $\boxed{d}$ $\frac{1}{4e^2}$.

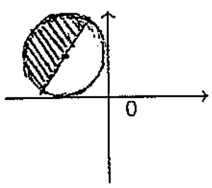
2. Sia $f(x)$ una funzione tale che $\frac{1}{2} \leq f''(x) \leq 1$ per ogni $x \in [0,1]$. Sia $P_1(x)$ il polinomio di Taylor della funzione $f(x)$ di centro $x_0 = 0$ e di grado 1. Allora:
$\boxed{a}$ $\frac{1}{3} \leq \int_0^1 [f(x) - P_1(x)]\,dx \leq \frac{1}{2}$; $\boxed{b}$ $\frac{1}{6} \leq \int_0^1 [f(x) - P_1(x)]\,dx \leq \frac{1}{3}$;
$\boxed{c}$ $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 [f(x) - P_1(x)]\,dx \leq \frac{2}{3}$; ☒ $\frac{1}{12} \leq \int_0^1 [f(x) - P_1(x)]\,dx \leq \frac{1}{6}$.

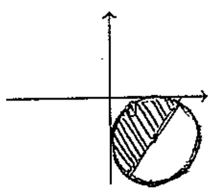
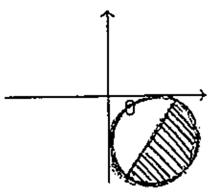
3. I numeri complessi soluzioni di $5z - \bar{z} = z\bar{z} + 6i$ sono: $\boxed{a}$ $3 - 2\sqrt{2} - i$ e $3 + 2\sqrt{2} - i$; $\boxed{b}$ $3 - 2\sqrt{2} + i$ e $3 + 2\sqrt{2} + i$; $\boxed{c}$ $2 - \sqrt{3} - i$ e $2 + \sqrt{3} - i$; ☒ $2 - \sqrt{3} + i$ e $2 + \sqrt{3} + i$.

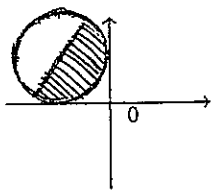
4. L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^\alpha}{n^2 + 2^n}$ è convergente è: $\boxed{a}$ $\alpha > 0$; ☒ nessun valore; $\boxed{c}$ $\alpha > 1$; $\boxed{d}$ $0 < \alpha < 1$.

5. L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale $\int_0^1 \frac{(x^2+1)x^3}{\log(1+2x^\alpha)}dx$ è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente è: $\boxed{a}$ $1/2 < \alpha < 1$; $\boxed{b}$ $1 < \alpha < 3/2$; $\boxed{c}$ $2 < \alpha < 3$; ☒ $3 < \alpha < 4$.

6. L'insieme dei numeri complessi z tali che $|z - 1| < |z - 2 + i|$ e $|z - 1 + i| < 1$ è la regione tratteggiata:

$\boxed{a}$ 

; ☒ 
; $\boxed{c}$ 

; $\boxed{d}$ 

.

7. Determinare i valori dei parametri reali a e b affinché la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} - ax^2 & \text{per } x \geq 1 \\ \log(2x-1) + bx & \text{per } x < 1 \end{cases}$$

sia continua e derivabile nel punto $x_0 = 1$. $\boxed{a}$ $a = -2$, $b = -1$; $\boxed{b}$ $a = -3$, $b = -4$; ☒ $a = -2$, $b = 3$; $\boxed{d}$ $a = 7$, $b = 6$.

8. Sia $g(x) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua con $g(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ e tale che $\lim_{x\to+\infty} x^3 g(x) = 0$. Allora è sempre vero che: ☒ $\sum_{n=1}^{\infty} g(n)$ è convergente; $\boxed{b}$ $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx \leq 1$; $\boxed{c}$ $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ è divergente; $\boxed{d}$ $g(x) = 1$ ha soluzione per $x > 0$.

CALCOLO 1		24 aprile 2008
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* -0.25.

1. L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^\alpha}{1+3^n}$ è convergente è: $\boxed{\xcancel{a}}$ $\alpha > 0$; $\boxed{b}$ nessun valore; $\boxed{c}$ $\alpha > 1$; $\boxed{d}$ $0 < \alpha < 1$.

2. Sia $g(x) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua con $g(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ e tale che $\lim_{x\to+\infty} x^3 g(x) = 0$. Allora è sempre vero che: $\boxed{\xcancel{a}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} g(n)$ è convergente; $\boxed{b}$ $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx \leq 1$; $\boxed{c}$ $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ è divergente; $\boxed{d}$ $g(x) = 1$ ha soluzione per $x > 0$.

3. L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale $\int_0^1 \frac{\sin^2(2x)}{x^\alpha(2+x)}dx$ è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente è: $\boxed{a}$ $1/2 < \alpha < 1$; $\boxed{b}$ $1 < \alpha < 3/2$; $\boxed{\xcancel{c}}$ $2 < \alpha < 3$; $\boxed{d}$ $3 < \alpha < 4$.

4. Il valore massimo assoluto della funzione $f(x) = xe^{-2x}$ nell'intervallo $[0, 1]$ è: $\boxed{a}$ $\frac{1}{4e}$; $\boxed{\xcancel{b}}$ $\frac{1}{2e}$; $\boxed{c}$ $\frac{1}{e^2}$; $\boxed{d}$ $\frac{1}{4e^2}$.

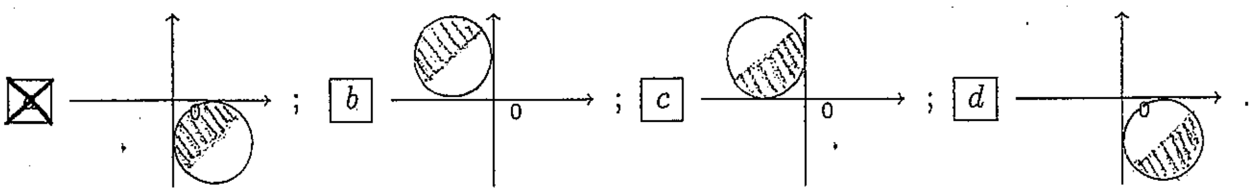
5. I numeri complessi soluzioni di $5z + \bar{z} = z\bar{z} + 4i$ sono: $\boxed{a}$ $3 - 2\sqrt{2} - i$ e $3 + 2\sqrt{2} - i$; $\boxed{\xcancel{b}}$ $3 - 2\sqrt{2} + i$ e $3 + 2\sqrt{2} + i$; $\boxed{c}$ $2 - \sqrt{3} - i$ e $2 + \sqrt{3} - i$; $\boxed{d}$ $2 - \sqrt{3} + i$ e $2 + \sqrt{3} + i$.

6. Determinare i valori dei parametri reali a e b affinché la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x-2} + ax & \text{per } x \geq 1 \\ \log(2x-1) + bx^2 & \text{per } x < 1 \end{cases}$$

sia continua e derivabile nel punto $x_0 = 1$. $\boxed{\xcancel{a}}$ $a = -2$, $b = -1$; $\boxed{b}$ $a = -3$, $b = -4$; $\boxed{c}$ $a = -2$, $b = 3$; $\boxed{d}$ $a = 7$, $b = 6$.

7. L'insieme dei numeri complessi z tali che $|z - 1| < |z - 2 + i|$ e $|z - 1 + i| < 1$ è la regione tratteggiata:



8. Sia $f(x)$ una funzione tale che $3 \leq f''(x) \leq 4$ per ogni $x \in [0, 1]$. Sia $P_1(x)$ il polinomio di Taylor della funzione $f(x)$ di centro $x_0 = 0$ e di grado 1. Allora: $\boxed{a}$ $\frac{1}{3} \leq \int_0^1 [f(x) - P_1(x)]\,dx \leq \frac{1}{2}$; $\boxed{b}$ $\frac{1}{6} \leq \int_0^1 [f(x) - P_1(x)]\,dx \leq \frac{1}{3}$; $\boxed{\xcancel{c}}$ $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 [f(x) - P_1(x)]\,dx \leq \frac{2}{3}$; $\boxed{d}$ $\frac{1}{12} \leq \int_0^1 [f(x) - P_1(x)]\,dx \leq \frac{1}{6}$.

CALCOLO 1		24 aprile 2008
Cognome:	Nome:	Matricola:

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

1. I numeri complessi soluzioni di $5\bar{z} - z = z\bar{z} + 6i$ sono: $\boxed{a}$ $2 - \sqrt{3} + i$ e $2 + \sqrt{3} + i$; $\boxed{b}$ $3 - 2\sqrt{2} - i$ e $3 + 2\sqrt{2} - i$; $\boxed{c}$ $3 - 2\sqrt{2} + i$ e $3 + 2\sqrt{2} + i$; $\boxtimes$ $2 - \sqrt{3} - i$ e $2 + \sqrt{3} - i$.

2. Determinare i valori dei parametri reali a e b affinché la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{2-2x} - ax & \text{per } x < 1 \\ \log(3x-2) - bx^2 & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$$

sia continua e derivabile nel punto $x_0 = 1$. $\boxtimes$ $a = 7$, $b = 6$; $\boxed{b}$ $a = -2$, $b = -1$; $\boxed{c}$ $a = -3$, $b = -4$; $\boxed{d}$ $a = -2$, $b = 3$.

3. Sia $g(x) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua con $g(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ e tale che $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}g(x) = 1$. Allora è sempre vero che: $\boxed{a}$ $g(x) = 1$ ha soluzione per $x > 0$; $\boxed{b}$ $\sum_{n=1}^{\infty} g(n)$ è convergente; $\boxed{c}$ $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx \leq 1$; $\boxtimes$ $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ è divergente.

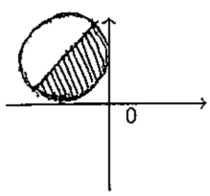
4. L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale $\int_0^1 \frac{(2x+1)x}{\sin^2(x^\alpha)}dx$ è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente è: $\boxed{a}$ $3 < \alpha < 4$; $\boxtimes$ $1/2 < \alpha < 1$; $\boxed{c}$ $1 < \alpha < 3/2$; $\boxed{d}$ $2 < \alpha < 3$.

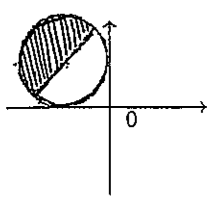
5. Sia $f(x)$ una funzione tale che $3 \leq f''(x) \leq 4$ per ogni $x \in [0,1]$. Sia $P_1(x)$ il polinomio di Taylor della funzione $f(x)$ di centro $x_0 = 0$ e di grado 1. Allora:
$\boxed{a}$ $\frac{1}{12} \leq \int_0^1 [f(x) - P_1(x)]\,dx \leq \frac{1}{6}$; $\boxed{b}$ $\frac{1}{3} \leq \int_0^1 [f(x) - P_1(x)]\,dx \leq \frac{1}{2}$;
$\boxed{c}$ $\frac{1}{6} \leq \int_0^1 [f(x) - P_1(x)]\,dx \leq \frac{1}{3}$; $\boxtimes$ $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 [f(x) - P_1(x)]\,dx \leq \frac{2}{3}$.

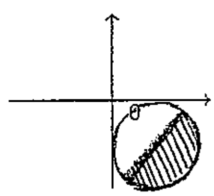
6. L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^\alpha}{n^2 + 2^n}$ è convergente è: $\boxed{a}$ $0 < \alpha < 1$; $\boxed{b}$ $\alpha > 0$; $\boxtimes$ nessun valore; $\boxed{d}$ $\alpha > 1$.

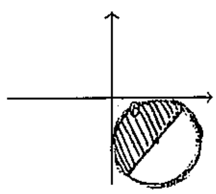
7. Il valore massimo assoluto della funzione $f(x) = x^2 e^{-4x}$ nell'intervallo $[0,1]$ è: $\boxtimes$ $\frac{1}{4e^2}$; $\boxed{b}$ $\frac{1}{4e}$; $\boxed{c}$ $\frac{1}{2e}$; $\boxed{d}$ $\frac{1}{e^2}$.

8. L'insieme dei numeri complessi z tali che $|z - i| > |z + 1 - 2i|$ e $|z + 1 - i| < 1$ è la regione tratteggiata:

$\boxed{a}$ 

; $\boxtimes$ 

; $\boxed{c}$ 

; $\boxed{d}$ 

.

1. **(6 punti)**
Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0}\left(e^{2x^2}-2x\sin x\right)^{\frac{2x-1}{x^4}} .$$

Il limite si riscrive come:

$$\left(e^{2x^2}-2x\sin x\right)^{\frac{2x-1}{x^4}} = e^{\log\left[\left(e^{2x^2}-2x\sin x\right)^{\frac{2x-1}{x^4}}\right]} =$$

$$= e^{\frac{2x-1}{x^4}\log\left(e^{2x^2}-2x\sin x\right)} .$$

Concentriamoci sull'esponente: $(2x-1)\xrightarrow[x\to 0]{} -1$, mentre posso scrivere $(x\to 0,\ t\to 0)$

$$e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2) \Rightarrow e^{2x^2} = 1+2x^2+\frac{4x^4}{2}+o(x^4)$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^3) \Rightarrow -2x\sin x = -2x^2+\frac{2x^4}{6}+o(x^4)$$

$$\log(1+t) = t+o(t),$$

per cui

$$\log\left(e^{2x^2}-2x\sin x\right) = \log\left(1+\cancel{2x^2}+2x^4+o(x^4)-\cancel{2x^2}+\frac{x^4}{3}\right) =$$

$$= \log\left(1+\frac{7}{3}x^4+o(x^4)\right) = \frac{7}{3}x^4+o(x^4) .$$

In conclusione

$$\frac{2x-1}{x^4}\log\left(e^{2x^2}-2x\sin x\right) = (2x-1)\,\frac{7/3\,x^4+o(x^4)}{x^4}\xrightarrow[x\to 0]{} -7/3 ,$$

e il risultato finale è: $\boxed{e^{-7/3}.}$

2. (6 punti)

Sia S la regione piana delimitata dal grafico della funzione $f(x) = \frac{x\sqrt{2x}}{3+2x^2}$ per $0 \leq x \leq 2$, dall'asse x e dalle rette verticali $x = 0$ e $x = 2$. Calcolare il volume del solido ottenuto facendo ruotare S attorno all'asse x.

Per i solidi di rotazione attorno all'asse x il volume è dato da:

$$V = \pi \int_0^2 \left(\frac{x\sqrt{2x}}{3+2x^2}\right)^2 dx = \pi \int_0^2 \frac{2x^3}{(3+2x^2)^2} dx .$$

Ponendo $t = 3+2x^2$ [altre vie analoghe: $t = 2x^2$; $t = x^2 \dots$]

si ha $dt = 4x\,dx$, $2x^2 = t-3$, $x=0 \to t=3$, $x=2 \to t=11$, per cui:

$$V = \pi \int_3^{11} \frac{(t-3)}{t^2} \cdot \frac{1}{4} dt = \frac{\pi}{4} \int_3^{11} \left(\frac{1}{t} - \frac{3}{t^2}\right) dt =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\log t + \frac{3}{t}\right)\Big|_3^{11} = \frac{\pi}{4}\log\frac{11}{3} + \frac{3\pi}{4}\left(\frac{1}{11} - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{4}\log\frac{11}{3} - \frac{2\pi}{11}.}$$

[Con la sostituzione $t = x^2$ si ha $dt = 2x\,dx$, $x=0 \to t=0$, $x=2 \to t=4$, per cui

$$V = \pi \int_0^4 \frac{t}{(3+2t)^2} dt = \frac{\pi}{2} \int_0^4 \frac{2t+3-3}{(3+2t)^2} dt = \frac{\pi}{2} \int_0^4 \left(\frac{1}{3+2t} - \frac{3}{(3+2t)^2}\right) dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\log(3+2t) + \frac{3}{2}\,\frac{1}{3+2t}\right)\Big|_{t=0}^{t=4} = \frac{\pi}{4}\log\frac{11}{3} + \frac{3\pi}{4}\left(\frac{1}{11} - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4}\log\frac{11}{3} - \frac{2\pi}{11}. \quad]$$

CALCOLO I	24 aprile 2008

4. (6 punti)
Date le funzioni $f(x) = \sqrt{1-x}$ e $g(x) = \log(1+2x) - x$, calcolare il polinomio di Taylor di secondo grado e di centro $x_0 = 0$ della funzione prodotto $f(x)g(x)$.

Sviluppiamo separatamente $f(x)$ e $g(x)$. Siccome $\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, si ha

$$g(x) = \log(1+2x) - x = 2x - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2) - x = x - 2x^2 + o(x^2).$$

Per sviluppare $f(x)$, facciamo le derivate:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4}(1-x)^{-3/2},$$

per cui $f(0) = 1$, $f'(0) = -1/2$, $f''(0) = -1/4$ e

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2).$$

Moltiplicando $f(x)$ e $g(x)$:

$$f(x)g(x) = \left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right)\cdot\left(x - 2x^2 + o(x^2)\right) = x - 2x^2 + o(x^2) - \frac{1}{2}x^2 =$$

$$= x - 5/2\, x^2 + o(x^2).$$

Il polinomio richiesto è quindi: $\boxed{x - 5/2\, x^2.}$

[Si possono anche calcolare "brutalmente" le derivate di $f(x)g(x)$:

$$(f(x)g(x))' = -\frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}\left(\log(1+2x) - x\right) + (1-x)^{1/2}\left(\frac{2}{1+2x} - 1\right),$$

$$(f(x)g(x))'' = -\frac{1}{4}(1-x)^{-3/2}\left(\log(1+2x) - x\right) - \frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}\left(\frac{2}{1+2x} - 1\right) +$$

$$-\frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}\left(\frac{2}{1+2x} - 1\right) + (1-x)^{1/2}\frac{2(-4)}{(1+2x)^2},$$

da cui $f(0)g(0) = 1\cdot 0 = 0$, $(fg)'(0) = -\frac{1}{2}\cdot 0 + 1\cdot(2-1) = 1$,

$$(fg)''(0) = -\frac{1}{4}\cdot 0 - \frac{1}{2}(2-1) - \frac{1}{2}(2-1) - 4 = -5,$$

e quindi

$$f(x)g(x) = x - 5/2\, x^2 + o(x^2),$$

e il polinomio richiesto è: $x - 5/2\, x^2$.]