| CALCOLO 1 | | 8 gennaio 2008 |
|---|---|---|
| Cognome: | Nome: | Matricola: |

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* $-0.25$.

1. L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{x^2}-1}{2x^{2\alpha}+x^{3\alpha}}\,dx$ è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente è dato da: $\boxed{a}$ $\frac{1}{2} < \alpha < 1$; $\boxed{b}$ $2 < \alpha < 3$; $\boxed{c}$ $1 < \alpha < 2$; $\boxtimes$ $1 < \alpha < \frac{3}{2}$.

2. Il valore minimo e il valore massimo della funzione $f(x) = |x^2 - 4x - 5|$ nell'intervallo $[-2, 4]$ sono: $\boxed{a}$ min $= 5$, max $= 9$; $\boxed{b}$ min $= 0$, max $= 16$; $\boxed{c}$ min $= 7$, max $= 16$; $\boxtimes$ min $= 0$, max $= 9$.

3. Le funzioni continue $f(x)$ e $g(x)$ siano tali che $\int_1^3 f(x)\,dx \leq \int_1^2 g(x)\,dx$. Allora, considerando il valore massimo e il valore minimo nei rispettivi intervalli di integrazione, è vero che: $\boxed{a}$ $\max g(x) \geq \frac{1}{2}\min f(x)$; $\boxed{b}$ $\max f(x) \geq 2\min g(x)$; $\boxtimes$ $\max g(x) \geq 2\min f(x)$; $\boxed{d}$ $\max f(x) \geq \frac{1}{2}\min g(x)$.

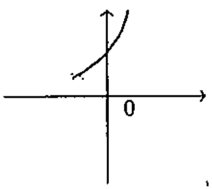
4. Sia $f(x)$ una funzione continua per cui vale $f(0) = -2$ ed $f(1) = -1$. Allora esiste una soluzione $x_0 \in (0,1)$ dell'equazione seguente: $\boxed{a}$ $f(x)+1-x=0$; $\boxed{b}$ $f(x)-x^2-2=0$; $\boxtimes$ $f(x)+x+1=0$; $\boxed{d}$ $f(x)+x^2-2=0$.

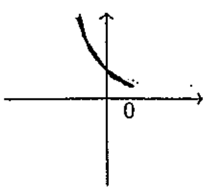
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x}-1)^2\log(1-3\sqrt{x})}{\sqrt{2x}\,\sin^4(\sqrt{x})} =$ $\boxed{a}$ $-4$; $\boxed{b}$ $\sqrt{2}$; $\boxtimes$ $-6\sqrt{2}$; $\boxed{d}$ $3/4$.

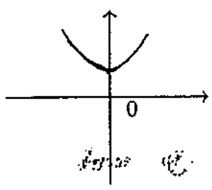
6. Le soluzioni dell'equazione $z + \dfrac{1-i}{z} = -2+i$ sono: $\boxed{a}$ $z_1 = 1+i$ e $z_2 = 1$; $\boxed{b}$ $z_1 = 1-i$ e $z_2 = -i$; $\boxtimes$ $z_1 = -1+i$ e $z_2 = -1$; $\boxed{d}$ $z_1 = 1+i$ e $z_2 = i$.

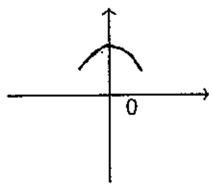
7. Il polinomio di Taylor di secondo grado (e di centro $x_0 = 0$) della soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \sin(xy) - 1 + x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
è dato da: $\boxed{a}$ $-x - x^2/2$; $\boxed{b}$ $x - x^2/2$; $\boxtimes$ $-x + x^2/2$; $\boxed{d}$ $x + x^2/2$.

8. Sia $f(x) = x^2 + 2x$. Allora il grafico di $h(x) = e^{-f(x)} + f(x)$ vicino all'origine è:

$\boxed{a}$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxtimes$ 

; $\boxed{d}$ 

.

| CALCOLO 1 | | 8 gennaio 2008 |
|---|---|---|
| Cognome: | Nome: | Matricola: |

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

1. Le soluzioni dell'equazione $z - \dfrac{1-i}{z} = 1+2i$ sono: $\boxed{a}$ $z_1 = 1-i$ e $z_2 = -i$; $\boxed{b}$ $z_1 = -1+i$ e $z_2 = -1$; $\boxed{\times}$ $z_1 = 1+i$ e $z_2 = i$; $\boxed{d}$ $z_1 = 1+i$ e $z_2 = 1$.

2. Le funzioni continue $f(x)$ e $g(x)$ siano tali che $\int_1^3 f(x)\,dx \leq \int_1^2 g(x)\,dx$. Allora, considerando il valore massimo e il valore minimo nei rispettivi intervalli di integrazione, è vero che: $\boxed{a}$ $\max f(x) \geq 2\min g(x)$; $\boxed{\times}$ $\max g(x) \geq 2\min f(x)$; $\boxed{c}$ $\max f(x) \geq \frac{1}{2}\min g(x)$; $\boxed{d}$ $\max g(x) \geq \frac{1}{2}\min f(x)$.

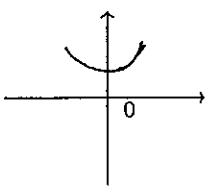
3. Sia $f(x)$ una funzione continua per cui vale $f(0) = -2$ ed $f(1) = -1$. Allora esiste una soluzione $x_0 \in (0,1)$ dell'equazione seguente: $\boxed{a}$ $f(x) - x^2 - 2 = 0$; $\boxed{\times}$ $f(x) + x + 1 = 0$; $\boxed{c}$ $f(x) + x^2 - 2 = 0$; $\boxed{d}$ $f(x) + 1 - x = 0$.

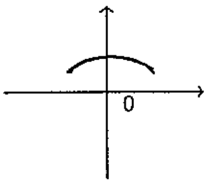
4. Il polinomio di Taylor di secondo grado (e di centro $x_0 = 0$) della soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = -\cos x + \sin y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
è dato da: $\boxed{a}$ $x - x^2/2$; $\boxed{b}$ $-x + x^2/2$; $\boxed{c}$ $x + x^2/2$; $\boxed{\times}$ $-x - x^2/2$.

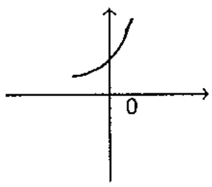
5. L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x^2 + x^4}{e^{3x^\alpha} - 1}\,dx$ è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente è dato da: $\boxed{\times}$ $2 < \alpha < 3$; $\boxed{b}$ $1 < \alpha < 2$; $\boxed{c}$ $1 < \alpha < \frac{3}{2}$; $\boxed{d}$ $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

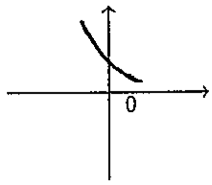
6. Il valore minimo e il valore massimo della funzione $f(x) = |x^2 + 4x - 12|$ nell'intervallo $[-3, 3]$ sono: $\boxed{\times}$ min $= 0$, max $= 16$; $\boxed{b}$ min $= 7$, max $= 16$; $\boxed{c}$ min $= 0$, max $= 9$; $\boxed{d}$ min $= 5$, max $= 9$.

7. Sia $f(x) = x^2 + 2x$. Allora il grafico di $h(x) = e^{-f(x)} + f(x)$ vicino all'origine è:

$\boxed{\times}$ 

; $\boxed{b}$ 

; $\boxed{c}$ 

; $\boxed{d}$ 

.

8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x}-1)^2 \log(1-3\sqrt{x})}{\sqrt{2x}\,\sin^4(\sqrt{x})} =$ $\boxed{a}$ $\sqrt{2}$; $\boxed{\times}$ $-6\sqrt{2}$; $\boxed{c}$ $3/4$; $\boxed{d}$ $-4$.

| CALCOLO 1 | | 8 gennaio 2008 |
|---|---|---|
| Cognome: | Nome: | Matricola: |

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

1. Il polinomio di Taylor di secondo grado (e di centro $x_0 = 0$) della soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \sin x + \cos y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
è dato da: $\boxed{a}$ $x - x^2/2$; $\boxed{b}$ $-x + x^2/2$; $\boxed{\times}$ $x + x^2/2$; $\boxed{d}$ $-x - x^2/2$.

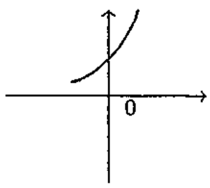
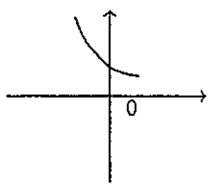
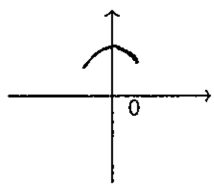
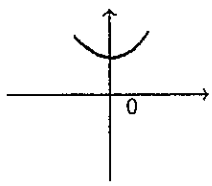
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}\sin(3x^2)}{[1-\cos(2x)]\sin(2\sqrt{x})} =$ $\boxed{a}$ $\sqrt{2}$; $\boxed{b}$ $-6\sqrt{2}$; $\boxed{\times}$ $3/4$; $\boxed{d}$ $-4$.

3. L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(2x^\alpha)}{2x^2 + x^3}\,dx$ è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente è dato da: $\boxed{a}$ $2 < \alpha < 3$; $\boxed{\times}$ $1 < \alpha < 2$; $\boxed{c}$ $1 < \alpha < \frac{3}{2}$; $\boxed{d}$ $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

4. Le soluzioni dell'equazione $z - \dfrac{1-i}{z} = 1 + 2i$ sono: $\boxed{a}$ $z_1 = 1 - i$ e $z_2 = -i$; $\boxed{b}$ $z_1 = -1 + i$ e $z_2 = -1$; $\boxed{\times}$ $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = i$; $\boxed{d}$ $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = 1$.

5. Sia $f(x)$ una funzione continua per cui vale $f(0) = 1$ ed $f(1) = 2$. Allora esiste una soluzione $x_0 \in (0,1)$ dell'equazione seguente: $\boxed{a}$ $f(x) - x^2 - 2 = 0$; $\boxed{b}$ $f(x) + x + 1 = 0$; $\boxed{\times}$ $f(x) + x^2 - 2 = 0$; $\boxed{d}$ $f(x) + 1 - x = 0$.

6. Sia $f(x) = x^2 - 2x$. Allora il grafico di $h(x) = e^{f(x)} - f(x)$ vicino all'origine è:

$\boxed{a}$  ; $\boxed{b}$  ; $\boxed{c}$  ; $\boxed{\times}$  .

7. Il valore minimo e il valore massimo della funzione $f(x) = |x^2 - 4x - 5|$ nell'intervallo $[0,6]$ sono: $\boxed{a}$ min = 0, max = 16; $\boxed{b}$ min = 7, max = 16; $\boxed{\times}$ min = 0, max = 9; $\boxed{d}$ min = 5, max = 9.

8. Le funzioni continue $f(x)$ e $g(x)$ siano tali che $\int_1^3 f(x)\,dx \geq \int_2^3 g(x)\,dx$. Allora, considerando il valore massimo e il valore minimo nei rispettivi intervalli di integrazione, è vero che: $\boxed{a}$ $\max f(x) \geq 2\min g(x)$; $\boxed{b}$ $\max g(x) \geq 2\min f(x)$; $\boxed{\times}$ $\max f(x) \geq \frac{1}{2}\min g(x)$; $\boxed{d}$ $\max g(x) \geq \frac{1}{2}\min f(x)$.

| CALCOLO 1 | | 8 gennaio 2008 |
|---|---|---|
| Cognome: | Nome: | Matricola: |

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

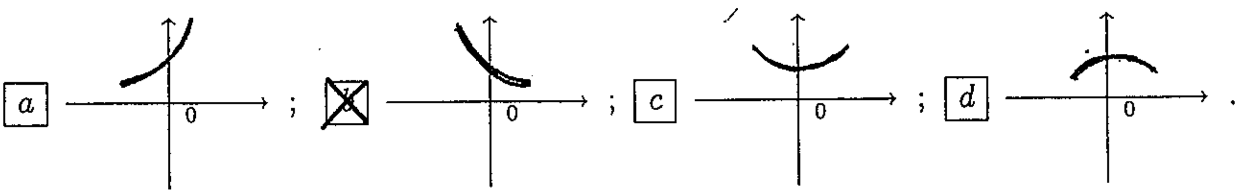
1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)\sqrt{e^{2x^3}-1}}{\sqrt{x}\,[1-\cos(2x)]} =$ $\boxed{a}$ $3/4$; $\boxed{b}$ $-4$; $\boxtimes$ $\sqrt{2}$; $\boxed{d}$ $-6\sqrt{2}$.

2. Le soluzioni dell'equazione $z - \frac{1+i}{z} = 1-2i$ sono: $\boxed{a}$ $z_1 = 1+i$ e $z_2 = i$; $\boxed{b}$ $z_1 = 1+i$ e $z_2 = 1$; $\boxtimes$ $z_1 = 1-i$ e $z_2 = -i$; $\boxed{d}$ $z_1 = -1+i$ e $z_2 = -1$.

3. Il valore minimo e il valore massimo della funzione $f(x) = |x^2 - 4x - 5|$ nell'intervallo $[-2, 4]$ sono: $\boxtimes$ min = 0, max = 9; $\boxed{b}$ min = 5, max = 9; $\boxed{c}$ min = 0, max = 16; $\boxed{d}$ min = 7, max = 16.

4. Le funzioni continue $f(x)$ e $g(x)$ siano tali che $\int_1^2 f(x)\,dx \geq \int_1^3 g(x)\,dx$. Allora, considerando il valore massimo e il valore minimo nei rispettivi intervalli di integrazione, è vero che: $\boxed{a}$ $\max f(x) \geq \frac{1}{2}\min g(x)$; $\boxed{b}$ $\max g(x) \geq \frac{1}{2}\min f(x)$; $\boxtimes$ $\max f(x) \geq 2\min g(x)$; $\boxed{d}$ $\max g(x) \geq 2\min f(x)$.

5. Sia $f(x) = 3x + x^2$. Allora il grafico di $h(x) = e^{-f(x)} - f(x)$ vicino all'origine è:




6. L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale $\int_0^1 \frac{2x^2 + x^4}{e^{3x^\alpha} - 1}\,dx$ è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente è dato da: $\boxed{a}$ $1 < \alpha < \frac{3}{2}$; $\boxed{b}$ $\frac{1}{2} < \alpha < 1$; $\boxtimes$ $2 < \alpha < 3$; $\boxed{d}$ $1 < \alpha < 2$.

7. Sia $f(x)$ una funzione continua per cui vale $f(0) = 3$ ed $f(1) = 2$. Allora esiste una soluzione $x_0 \in (0,1)$ dell'equazione seguente: $\boxed{a}$ $f(x) + x^2 - 2 = 0$; $\boxed{b}$ $f(x) + 1 - x = 0$; $\boxtimes$ $f(x) - x^2 - 2 = 0$; $\boxed{d}$ $f(x) + x + 1 = 0$.

8. Il polinomio di Taylor di secondo grado (e di centro $x_0 = 0$) della soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \cos(xy) - x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

è dato da: $\boxed{a}$ $x + x^2/2$; $\boxed{b}$ $-x - x^2/2$; $\boxtimes$ $x - x^2/2$; $\boxed{d}$ $-x + x^2/2$.

| CALCOLO 1 | | 8 gennaio 2008 |
|---|---|---|
| Cognome: | Nome: | Matricola: |

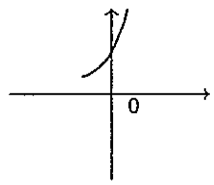
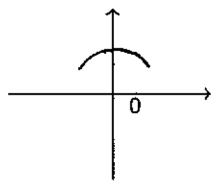
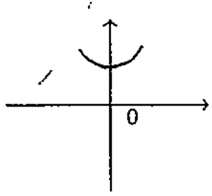
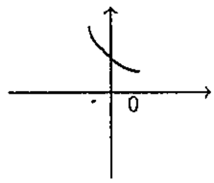
- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

1. Il valore minimo e il valore massimo della funzione $f(x) = |x^2 + 4x - 12|$ nell'intervallo $[-3, 3]$ sono: $\boxed{a}$ min = 7, max = 16; $\boxed{b}$ min = 0, max = 9; $\boxed{c}$ min = 5, max = 9; $\boxed{\cancel{d}}$ min = 0, max = 16.

2. Sia $f(x)$ una funzione continua per cui vale $f(0) = 1$ ed $f(1) = 2$. Allora esiste una soluzione $x_0 \in (0, 1)$ dell'equazione seguente: $\boxed{a}$ $f(x) + x + 1 = 0$; $\boxed{\cancel{b}}$ $f(x) + x^2 - 2 = 0$; $\boxed{c}$ $f(x) + 1 - x = 0$; $\boxed{d}$ $f(x) - x^2 - 2 = 0$.

3. Il polinomio di Taylor di secondo grado (e di centro $x_0 = 0$) della soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \sin x + \cos y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
è dato da: $\boxed{a}$ $-x + x^2/2$; $\boxed{\cancel{b}}$ $x + x^2/2$; $\boxed{c}$ $-x - x^2/2$; $\boxed{d}$ $x - x^2/2$.

4. Sia $f(x) = 3x + x^2$. Allora il grafico di $h(x) = e^{-f(x)} - f(x)$ vicino all'origine è:

$\boxed{a}$  ; $\boxed{b}$  ; $\boxed{c}$  ; $\boxed{\cancel{d}}$  .

5. Le soluzioni dell'equazione $z + \dfrac{1+i}{z} = 2 + i$ sono: $\boxed{a}$ $z_1 = -1 + i$ e $z_2 = -1$; $\boxed{b}$ $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = i$; $\boxed{\cancel{c}}$ $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = 1$; $\boxed{d}$ $z_1 = 1 - i$ e $z_2 = -i$.

6. Le funzioni continue $f(x)$ e $g(x)$ siano tali che $\int_2^3 f(x)\,dx \leq \int_1^3 g(x)\,dx$. Allora, considerando il valore massimo e il valore minimo nei rispettivi intervalli di integrazione, è vero che: $\boxed{a}$ $\max g(x) \geq 2 \min f(x)$; $\boxed{b}$ $\max f(x) \geq \frac{1}{2} \min g(x)$; $\boxed{\cancel{c}}$ $\max g(x) \geq \frac{1}{2} \min f(x)$; $\boxed{d}$ $\max f(x) \geq 2 \min g(x)$.

7. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{(e^{2x^2} - 1)\sin(2\sqrt{x})}{\log(1 - x^2\sqrt{x})} =$ $\boxed{a}$ $-6\sqrt{2}$; $\boxed{b}$ $3/4$; $\boxed{\cancel{c}}$ $-4$; $\boxed{d}$ $\sqrt{2}$.

8. L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{x^2} - 1}{2x^{2\alpha} + x^{3\alpha}}\,dx$ è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente è dato da: $\boxed{a}$ $1 < \alpha < 2$; $\boxed{\cancel{b}}$ $1 < \alpha < \frac{3}{2}$; $\boxed{c}$ $\frac{1}{2} < \alpha < 1$; $\boxed{d}$ $2 < \alpha < 3$.

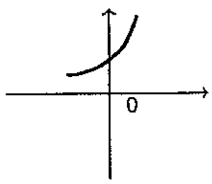
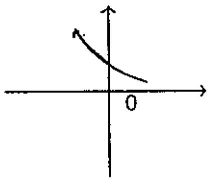
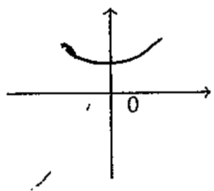
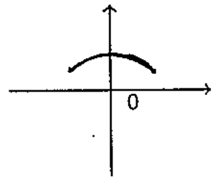
| CALCOLO 1 | | 8 gennaio 2008 |
|---|---|---|
| **Cognome:** | **Nome:** | **Matricola:** |

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

1. Le funzioni continue $f(x)$ e $g(x)$ siano tali che $\int_1^3 f(x)\,dx \geq \int_2^3 g(x)\,dx$. Allora, considerando il valore massimo e il valore minimo nei rispettivi intervalli di integrazione, è vero che: $\boxtimes$ $\max f(x) \geq \frac{1}{2}\min g(x)$; $\boxed{b}$ $\max g(x) \geq \frac{1}{2}\min f(x)$; $\boxed{c}$ $\max f(x) \geq 2\min g(x)$; $\boxed{d}$ $\max g(x) \geq 2\min f(x)$.

2. Il polinomio di Taylor di secondo grado (e di centro $x_0 = 0$) della soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \cos(xy) - x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
è dato da: $\boxed{a}$ $x + x^2/2$; $\boxed{b}$ $-x - x^2/2$; $\boxtimes$ $x - x^2/2$; $\boxed{d}$ $-x + x^2/2$.

3. Sia $f(x) = 3x - x^2$. Allora il grafico di $h(x) = f(x) + e^{f(x)}$ vicino all'origine è:

$\boxtimes$  ; $\boxed{b}$  ; $\boxed{c}$  ; $\boxed{d}$  .

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)\sqrt{e^{2x^3} - 1}}{\sqrt{x}\,[1 - \cos(2x)]} =$ $\boxed{a}$ $3/4$; $\boxed{b}$ $-4$; $\boxtimes$ $\sqrt{2}$; $\boxed{d}$ $-6\sqrt{2}$.

5. Il valore minimo e il valore massimo della funzione $f(x) = |x^2 + 4x - 12|$ nell'intervallo $[-7, -1]$ sono: $\boxed{a}$ min = 0, max = 9; $\boxed{b}$ min = 5, max = 9; $\boxtimes$ min = 0, max = 16; $\boxed{d}$ min = 7, max = 16.

6. Sia $f(x)$ una funzione continua per cui vale $f(0) = 0$ ed $f(1) = -1$. Allora esiste una soluzione $x_0 \in (0,1)$ dell'equazione seguente: $\boxed{a}$ $f(x) + x^2 - 2 = 0$; $\boxtimes$ $f(x) + 1 - x = 0$; $\boxed{c}$ $f(x) - x^2 - 2 = 0$; $\boxed{d}$ $f(x) + x + 1 = 0$.

7. L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(2x^\alpha)}{2x^2 + x^3}\,dx$ è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente è dato da: $\boxed{a}$ $1 < \alpha < \frac{3}{2}$; $\boxed{b}$ $\frac{1}{2} < \alpha < 1$; $\boxed{c}$ $2 < \alpha < 3$; $\boxtimes$ $1 < \alpha < 2$.

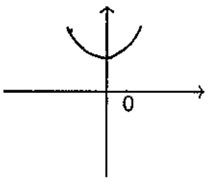
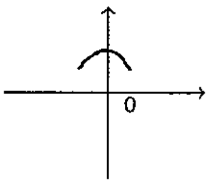
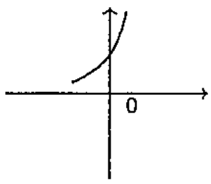
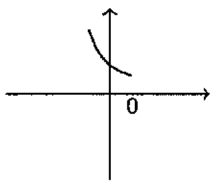
8. Le soluzioni dell'equazione $z - \dfrac{1+i}{z} = 1 - 2i$ sono: $\boxed{a}$ $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = i$; $\boxed{b}$ $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = 1$; $\boxtimes$ $z_1 = 1 - i$ e $z_2 = -i$; $\boxed{d}$ $z_1 = -1 + i$ e $z_2 = -1$.

| CALCOLO 1 | | 8 gennaio 2008 |
|---|---|---|
| Cognome: | Nome: | Matricola: |

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* $+1.5$. *Risposta errata:* $-0.25$.

1. Sia $f(x)$ una funzione continua per cui vale $f(0) = 3$ ed $f(1) = 2$. Allora esiste una soluzione $x_0 \in (0, 1)$ dell'equazione seguente: $\boxed{a}$ $f(x) + 1 - x = 0$; $\boxtimes$ $f(x) - x^2 - 2 = 0$; $\boxed{c}$ $f(x) + x + 1 = 0$; $\boxed{d}$ $f(x) + x^2 - 2 = 0$.

2. Sia $f(x) = x^2 - 2x$. Allora il grafico di $h(x) = e^{f(x)} - f(x)$ vicino all'origine è:

$\boxtimes$  ; $\boxed{b}$  ; $\boxed{c}$  ; $\boxed{d}$  .

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}\sin(3x^2)}{[1-\cos(2x)]\sin(2\sqrt{x})} =$ $\boxed{a}$ $-4$; $\boxed{b}$ $\sqrt{2}$; $\boxed{c}$ $-6\sqrt{2}$; $\boxtimes$ $3/4$.

4. L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x + x^3}{\sin^2(x^\alpha)}\,dx$ è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente è dato da: $\boxtimes$ $\frac{1}{2} < \alpha < 1$; $\boxed{b}$ $2 < \alpha < 3$; $\boxed{c}$ $1 < \alpha < 2$; $\boxed{d}$ $1 < \alpha < \frac{3}{2}$.

5. Le funzioni continue $f(x)$ e $g(x)$ siano tali che $\int_1^2 f(x)\,dx \geq \int_1^3 g(x)\,dx$. Allora, considerando il valore massimo e il valore minimo nei rispettivi intervalli di integrazione, è vero che: $\boxed{a}$ $\max g(x) \geq \frac{1}{2}\min f(x)$; $\boxtimes$ $\max f(x) \geq 2\min g(x)$; $\boxed{c}$ $\max g(x) \geq 2\min f(x)$; $\boxed{d}$ $\max f(x) \geq \frac{1}{2}\min g(x)$.

6. Il polinomio di Taylor di secondo grado (e di centro $x_0 = 0$) della soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \sin(xy) - 1 + x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
è dato da: $\boxed{a}$ $-x - x^2/2$; $\boxed{b}$ $x - x^2/2$; $\boxtimes$ $-x + x^2/2$; $\boxed{d}$ $x + x^2/2$.

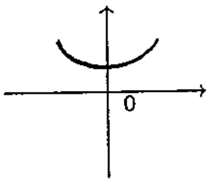
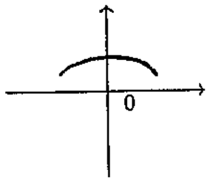
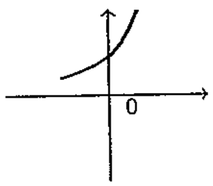
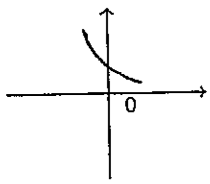
7. Le soluzioni dell'equazione $z + \dfrac{1-i}{z} = -2 + i$ sono: $\boxed{a}$ $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = 1$; $\boxed{b}$ $z_1 = 1 - i$ e $z_2 = -i$; $\boxtimes$ $z_1 = -1 + i$ e $z_2 = -1$; $\boxed{d}$ $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = i$.

8. Il valore minimo e il valore massimo della funzione $f(x) = |x^2 + 4x - 12|$ nell'intervallo $[-7, -1]$ sono: $\boxed{a}$ min $= 5$, max $= 9$; $\boxtimes$ min $= 0$, max $= 16$; $\boxed{c}$ min $= 7$, max $= 16$; $\boxed{d}$ min $= 0$, max $= 9$.

| CALCOLO 1 | | 8 gennaio 2008 |
|---|---|---|
| **Cognome:** | **Nome:** | **Matricola:** |

- *Una ed una sola delle quattro affermazioni è corretta. Indicarla con una croce.*
- *Per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio.*
- *Risposta corretta:* +1.5. *Risposta errata:* −0.25.

1. Sia $f(x) = 3x - x^2$. Allora il grafico di $h(x) = f(x) + e^{f(x)}$ vicino all'origine è:

$\boxed{a}$  ; $\boxed{b}$  ; $\boxed{\times}$  ; $\boxed{d}$  .

2. L'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x + x^3}{\sin^2(x^\alpha)}\,dx$ è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente è dato da: $\boxed{a}$ $1 < \alpha < 2$; $\boxed{b}$ $1 < \alpha < \frac{3}{2}$; $\boxed{\times}$ $\frac{1}{2} < \alpha < 1$; $\boxed{d}$ $2 < \alpha < 3$.

3. Le soluzioni dell'equazione $z + \dfrac{1+i}{z} = 2 + i$ sono: $\boxed{a}$ $z_1 = -1 + i$ e $z_2 = -1$; $\boxed{b}$ $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = i$; $\boxed{\times}$ $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = 1$; $\boxed{d}$ $z_1 = 1 - i$ e $z_2 = -i$.

4. Il valore minimo e il valore massimo della funzione $f(x) = |x^2 - 4x - 5|$ nell'intervallo $[0, 6]$ sono: $\boxed{a}$ min $= 7$, max $= 16$; $\boxed{\times}$ min $= 0$, max $= 9$; $\boxed{c}$ min $= 5$, max $= 9$; $\boxed{d}$ min $= 0$, max $= 16$.

5. Il polinomio di Taylor di secondo grado (e di centro $x_0 = 0$) della soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\cos x + \sin y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

è dato da: $\boxed{a}$ $-x + x^2/2$; $\boxed{b}$ $x + x^2/2$; $\boxed{\times}$ $-x - x^2/2$; $\boxed{d}$ $x - x^2/2$.

6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x^2} - 1)\sin(2\sqrt{x})}{\log(1 - x^2\sqrt{x})} =$ $\boxed{a}$ $-6\sqrt{2}$; $\boxed{b}$ $3/4$; $\boxed{\times}$ $-4$; $\boxed{d}$ $\sqrt{2}$.

7. Le funzioni continue $f(x)$ e $g(x)$ siano tali che $\int_2^3 f(x)\,dx \le \int_1^3 g(x)\,dx$. Allora, considerando il valore massimo e il valore minimo nei rispettivi intervalli di integrazione, è vero che: $\boxed{a}$ $\max g(x) \ge 2\min f(x)$; $\boxed{b}$ $\max f(x) \ge \frac{1}{2}\min g(x)$; $\boxed{\times}$ $\max g(x) \ge \frac{1}{2}\min f(x)$; $\boxed{d}$ $\max f(x) \ge 2\min g(x)$.

8. Sia $f(x)$ una funzione continua per cui vale $f(0) = 0$ ed $f(1) = -1$. Allora esiste una soluzione $x_0 \in (0, 1)$ dell'equazione seguente: $\boxed{a}$ $f(x) + x + 1 = 0$; $\boxed{b}$ $f(x) + x^2 - 2 = 0$; $\boxed{\times}$ $f(x) + 1 - x = 0$; $\boxed{d}$ $f(x) - x^2 - 2 = 0$.

| CALCOLO I | 8 gennaio 2008 |
|---|---|

**1. (6 punti)**
Si calcoli l'integrale

$$\int_1^6 \frac{x+4}{\sqrt{x+3}} \log(\sqrt{x+3})\, dx\ .$$

Cambiando variabile con $t=\sqrt{x+3}$ (per cui $t=2$ se $x=1$ e $t=3$ se $x=6$) si ha $t^2=x+3$ e $dx=2t\,dt$ (e $x+4=t^2+1$).
L'integrale dunque diventa:

$$2\int_2^3 \frac{t^2+1}{\cancel{t}}(\log t)\cancel{t}\,dt \underset{\text{per parti}}{=} 2\left(\frac{t^3}{3}+t\right)\log t\,\Big|_2^3 - 2\int_2^3\left(\frac{t^3}{3}+t\right)\frac{1}{t}\,dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^3}{3}+t\right)\log t\,\Big|_2^3 - \frac{2}{3}\int_2^3 t^2\,dt - 2\int_2^3 dt =$$

$$=\left[2\left(\frac{t^3}{3}+t\right)\log t - \frac{2}{9}t^3 - 2t\right]\Big|_2^3 =$$

$$= 2(9+3)\log 3 - 6 - 6 - 2\left(\frac{8}{3}+2\right)\log 2 + \frac{16}{9} + 4 =$$

$$= 24\log 3 - \frac{56}{9} - \frac{28}{3}\log 2\ .$$

| CALCOLO I | 8 gennaio 2008 |
|---|---|

2. (6 punti)
Per quali valori di $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 1$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n+1}\left(\frac{2x}{x-1}\right)^n$$

converge assolutamente? Converge semplicemente? Non converge?

Per la convergenza assoluta consideriamo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n+1}\left(\frac{|2x|}{|x-1|}\right)^n$.
Applicando il criterio del rapporto si ha:

$3^{n+1}+1 = 3^n(3+3^{-n})\ldots$

$$\frac{\frac{n+1}{3^{n+1}+1}\left(\frac{2|x|}{|x-1|}\right)^{n+1}}{\frac{n}{3^n+1}\left(\frac{2|x|}{|x-1|}\right)^n} = \frac{n+1}{n}\,\frac{3^n+1}{3^{n+1}+1}\,\frac{2|x|}{|x-1|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2|x|}{3|x-1|}$$ , che deve essere $<1$.

Dunque se $2|x| < 3|x-1|$ la serie converge assolutamente. Questo significa ($|x-1| = x-1$ se $x \geq 1\ldots$)

$-3(x-1) < 2x < 3(x-1)$ se $x \geq 1$, cioè $x>3$ e $5x>3$ $\Rightarrow$ $x>3$,

e ancora ($|x-1| = 1-x$ se $x<1\ldots$)

$-3(1-x) < 2x < 3(1-x)$ se $x<1$, cioè $x<3$ e $5x<3$ $\Rightarrow$ $x<3/5$.

Quindi c'è convergenza assoluta (e anche semplice) per $x<3/5$ e $x>3$.

Per $3/5 < x < 3$ si ha $2|x|/|x-1| > 3$, per cui

$$|a_n| = \frac{n}{3^n+1}\left(\frac{|2x|}{|x-1|}\right)^n = \frac{n}{1+3^{-n}}\left(\frac{2|x|}{3|x-1|}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \Rightarrow a_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0,$$

dunque la serie non converge.

Per $x=3$ si ha

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n+1}3^n$, con $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ e quindi $a_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$,

per cui la serie diverge (non converge, ed è a termini positivi...).

Per $x = 3/5$ si ha

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n+1}(-3)^n$, con $|a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ e quindi $a_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$,

per cui la serie non converge.

| CALCOLO I | 8 gennaio 2008 |
|---|---|

3. (6 punti)
Si determini la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y^2 - y - 2)\cos(3x) \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

È un'equazione non-lineare del 1° ordine a variabili separabili.
Ponendo $y' = \frac{dy}{dx}$ si ha, dividendo per $(y^2-y-2)$ e moltiplicando per $dx$:

$$\int \frac{dy}{y^2-y-2} = \int \cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x) + c\,.$$

Le radici di $y^2-y-2$ sono $y=-1$ e $y=2$, per cui devo trovare A e B tali che

$$\frac{1}{y^2-y-2} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y-2} = \frac{Ay-2A+By+B}{(y+1)(y-2)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ B-2A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=1/3 \\ A=-1/3 \end{cases}.$$

Quindi ho

$$\int\frac{dy}{y^2-y-2} = \frac{1}{3}\int\frac{dy}{y-2} - \frac{1}{3}\int\frac{dy}{y+1} = \frac{1}{3}\log\left|\frac{y-2}{y+1}\right| = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x)+c.$$

Imponendo $y(0)=0$ ho

$$\frac{1}{3}\log\left|\frac{-2}{1}\right| = \frac{1}{3}\operatorname{sen}0 + c = c\,,\quad \text{cioè}\quad c = \frac{1}{3}\log 2\,,$$

così

$$\log\left|\frac{y-2}{y+1}\right| = \operatorname{sen}(3x) + 3c = \operatorname{sen}(3x) + \log 2\,.$$

Inoltre, siccome per $x=0$ si ha $\frac{y(x)-2}{y(x)+1} < 0$, vale $\left|\frac{y-2}{y+1}\right| = -\frac{y-2}{y+1}$.
Così:

$$\log\left(\frac{2-y}{y+1}\right) = \operatorname{sen}(3x) + \log 2 \Rightarrow \frac{2-y}{y+1} = e^{\operatorname{sen}(3x)}\cdot e^{\log 2} = 2e^{\operatorname{sen}(3x)}.$$

Quindi

$$2-y = 2e^{\operatorname{sen}(3x)}y + 2e^{\operatorname{sen}(3x)}\,,$$

$$\left(2e^{\operatorname{sen}(3x)}+1\right)y(x) = 2-2e^{\operatorname{sen}(3x)}\,,$$

$$y(x) = 2\,\frac{1-e^{\sin(3x)}}{2e^{\operatorname{sen}(3x)}+1}\,.$$