CALCOLO I	15 febbraio 2008

1. (6 punti)
Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0}(e^x - \sin x)^{\frac{1}{1-\cos(3x)}}.$$

Gli sviluppi di Taylor di e^x, $\sin x$ e $\cos x$ sono:

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2), \quad \sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^3), \quad \cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2),$$

dunque $1-\cos(3x) = \frac{(3x)^2}{2}+o(x^2) = \frac{9}{2}x^2+o(x^2)$.

Riscriviamo il limite richiesto nella forma (più utile per i conti...)

$$(e^x-\sin x)^{\frac{1}{1-\cos(3x)}} = e^{\log\left[(e^x-\sin x)^{\frac{1}{1-\cos(3x)}}\right]} = e^{\frac{1}{1-\cos(3x)}\log(e^x-\sin x)}$$

Consideriamo solo l'esponente:

$$-\frac{x^3}{6}+o(x^3) = o(x^2)\ldots$$

$$\frac{\log(e^x-\sin x)}{1-\cos(3x)} = \frac{\log\left(1+\cancel{x}+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-\cancel{x}\right)}{\frac{9}{2}x^2+o(x^2)} = \frac{\log\left(1+x^2/2+o(x^2)\right)}{\frac{9}{2}x^2+o(x^2)}.$$

Siccome $\frac{\log(1+t)}{t}\xrightarrow[t\to 0]{} 1$, abbiamo

$$\frac{\log\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{\frac{9}{2}x^2+o(x^2)} = \underbrace{\frac{\log\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x^2/2+o(x^2)}}_{\downarrow\, x\to 0 \atop 1}\cdot\frac{x^2/2+o(x^2)}{\frac{9}{2}x^2+o(x^2)},$$

e infine

$$\frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{\frac{9}{2}x^2+o(x^2)} = \frac{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{2}+\overbrace{\frac{o(x^2)}{x^2}}^{\to 0}\right)}{\cancel{x^2}\left(\frac{9}{2}+\underbrace{\frac{o(x^2)}{x^2}}_{\to 0}\right)} \xrightarrow[x\to 0]{} 1/9,$$

per cui il risultato finale è $e^{1/9}$.

CALCOLO I	15 febbraio 2008

2. (6 punti)

Sia data la funzione $f(x) = e^{\frac{x^2}{x+1}}$. Se ne disegni qualitativamente il grafico [in particolare, motivando le risposte: insieme di definizione, limiti a $+\infty$ e $-\infty$ e negli eventuali punti di non definizione, segno, asintoti, crescenza e decrescenza, limiti della derivata a $+\infty$ e $-\infty$ e negli eventuali punti di non definizione; **non** è richiesto lo studio di convessità/concavità].

L'esponente è definito per ogni $x \in \mathbb{R}$ $x \neq -1$ quindi l'insieme di definizione della funzione $f(x)$ è $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x+1} = +\infty \quad \text{quindi} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x+1} = -\infty \quad \text{quindi} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2}{x+1} = +\infty \quad \text{quindi} \quad \lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2}{x+1} = -\infty \quad \text{quindi} \quad \lim_{x \to -1^-} f(x) = 0$$

$f(x) > 0 \quad \forall\, x \in D(f)$

Asintoti: f ha un asintoto verticale in $x = -1$, un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ per x che tende a $-\infty$

Inoltre $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{x^2}{x+1}}}{x} = +\infty$ quindi non c'è asintoto obliquo per x che tende a $+\infty$.

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} e^{\frac{x^2}{x+1}} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} e^{\frac{x^2}{x+1}}$$

$f'(x) = 0 \iff \begin{matrix} x = 0 \\ x = -2 \end{matrix}$

Se $-\infty < x < -2$ $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ crescente

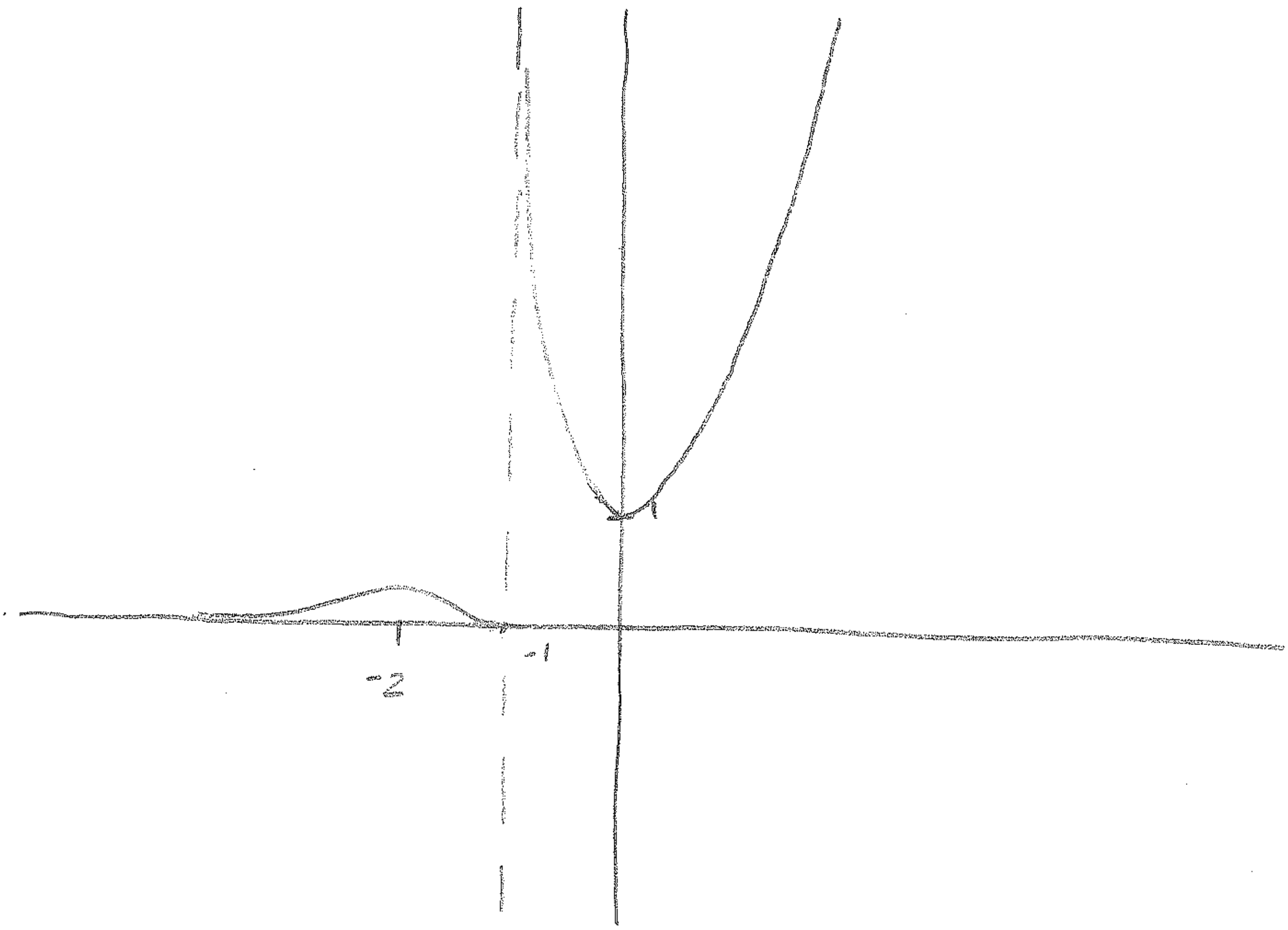
Se $-2 < x < -1$ $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ decrescente

Se $-1 < x < 0$ $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ decrescente

Se $0 < x < +\infty$ $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ crescente.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} e^{\frac{x^2}{x+1}} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} e^{\frac{x^2}{x+1}} = 0$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} e^{\frac{x^2}{x+1}} = +\infty \qquad \boxed{\lim_{x \to -1^-} \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} e^{\frac{x^2}{x+1}} = 0}$$


1
-2
-1

CALCOLO I	15 febbraio 2008

3. (6 punti)
Si determini la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = -e^x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

Per la soluzione dell'equazione omogenea cerchiamo le radici del polinomio associato:

$$r^2+r-2=0 \Rightarrow r=\frac{-1\mp\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\mp 3}{2}=\begin{cases}-2\\1\end{cases}.$$

Dunque la soluzione $y_0(x)$ dell'omogenea è $y_0(x)=c_1e^x+c_2e^{-2x}$.
Per la soluzione particolare della non-omogenea seguo il metodo di somiglianza, tenendo però conto che e^x è una soluzione dell'omogenea, dunque la forma corretta è $\hat{y}(x)=Axe^x$.
Derivando si ha $\hat{y}'=Ae^x+Axe^x$, $\hat{y}''=Ae^x+Ae^x+Axe^x$,
dunque

$$\hat{y}''+\hat{y}'-2\hat{y}=2Ae^x+\cancel{Ax}e^x+Ae^x+\cancel{Ax}e^x-\cancel{2Ax}e^x=3Ae^x$$

e bisogna imporre

$$3Ae^x=-e^x \Rightarrow A=-1/3.$$

La soluzione generale dell'equazione non omogenea è dunque

$$y(x)=c_1e^x+c_2e^{-2x}-1/3\,xe^x.$$

Imponendo i dati di Cauchy, siccome $y'=c_1e^x-2c_2e^{-2x}-\frac{1}{3}e^x-\frac{1}{3}xe^x$,
si ha

$$\begin{cases} 0=y(0)=c_1+c_2 \\ 0=y'(0)=c_1-2c_2-1/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=-c_2 \\ -c_2-2c_2-\frac{1}{3}=0\,, \end{cases}$$

dunque $c_2=-1/9$, $c_1=1/9$.
La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y(x)=\frac{1}{9}e^x-\frac{1}{9}e^{-2x}-\frac{1}{3}xe^x.$$